



BØRNE- OG
UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Matematik B

Højere forberedelseseksamen

Ny ordning

Forberedelsesmateriale

Forord

I undervisningsforløbet skal der ifølge læreplanen afsættes undervisningstid til, at eleverne kan arbejde med et centralt stillet forberedelsesmateriale.

Om dette skrives i vejledningen: *Desuden udsendes i begyndelsen af skoleåret i september et forberedelsesmateriale, som eleverne selvstændigt under vejledning skal arbejde med i 6 timer.*

Desuden står der: *Forberedelsesmateriale til den skriftlige eksamen kan indgå som en del af det supplerende stof, så der også kan stilles spørgsmål i det ved den mundtlige eksamen.*

I dette forberedelsesmateriale er emnet ”Logistisk vækst”.

Materialet indeholder teori, eksempler, øvelser, eksperimenter og opgaver.

Ved den skriftlige eksamen kan indhold og metoder fra forberedelsesmateriale indgå i opgaver i begge delprøver. Eksaminanderne bør medbringe resultaterne af arbejdet med dette materiale til brug ved delprøve 2. Hvis der til delprøve 1 kræves kendskab til særlige definitioner og formler, vil der være et indstiksark til formelsamlingen.



Opgaverne markeret med et tastatur kan kun forekomme i delprøve 2.



Opgaverne markeret med hånd og blyant kan forekomme i begge delprøver.

Hf matematik B

Forberedelsesmateriale

Logistisk vækst

December 2020, maj/juni 2021 og august 2021

Indhold

Indledning.....	2
1. Hvad er logistisk vækst?.....	3
2. Startværdi og øvre grænse.....	7
3. Grænseværdi og asymptote	10
4. Væksthastighed	13
Bilag 1. Vejledning til logistisk vækst i GeoGebra/WordMat	24
Bilag 2. Vejledning til logistisk vækst i Nspire.....	25
Bilag 3. Indstiksark til formelsamlingen	26

Indledning

Dette forberedelsesmateriale handler om *logistisk vækst*.

I forberedelsesmaterialet er der både eksempler, øvelser, eksperimenter og opgaver. Øvelserne er tænkt som hjælp til forståelse af teorien og metoderne. Opgaverne er tænkt som forberedelse til de opgaver, der kommer til den skriftlige eksamen. Det anbefales at arbejde med øvelser og eksperimenter tidligt i forløbet som et led i opbygningen af forståelsen. På et senere tidspunkt i forløbet og ved eksamenslæsning kan man koncentrere sig om at læse den egentlige tekst.

Øvelser og eksperimenter er markeret med blå margenlinje.

Eksempler er markeret med grøn margenlinje.

Opgaver er markeret med rød margenlinje.

Vigtige definitioner og sætninger er markeret med en sort ramme om teksten.

Arbejdet med forberedelsesmaterialet forudsætter brug af et computerbaseret matematisk værktøjsprogram med CAS. I dette materiale omtales det blot som et CAS-værktøj.

I bilag 1 og bilag 2 findes der korte vejledninger til arbejdet med logistisk vækst i programmerne GeoGebra/WordMat og NSpire.

Til dette forberedelsesmateriale hører fire digitale bilag. Disse er vedhæftet pdf-filen.

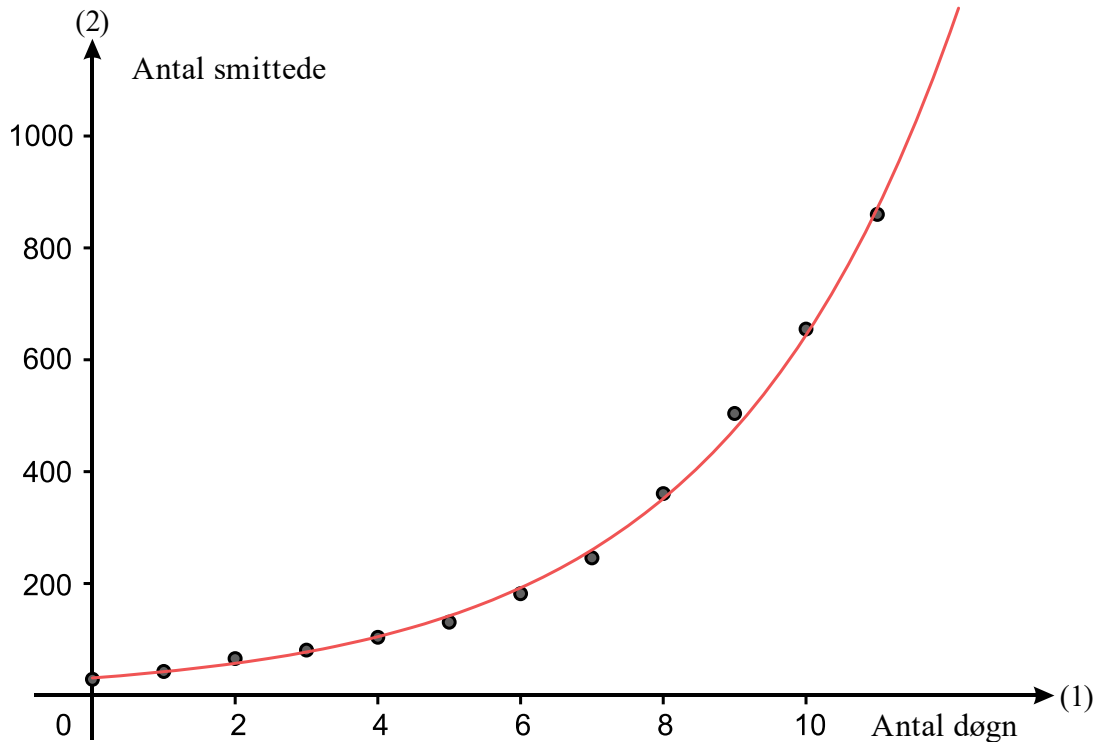
I GeoGebra kan der i flere tilfælde i materialet opstå et problem med regnenøjagtigheden. Det kan undgås ved at ændre indstillingerne, så GeoGebra arbejder med 10 decimaler.

1. Hvad er logistisk vækst?

I dette materiale skal vi studere en vækstform, der hedder *logistisk vækst*. Det er en vækstform, der på nogle punkter ligner eksponentiel vækst.

Vi lægger ud med et eksempel, der beskriver udviklingen i antallet af smittede med Coronavirus i Østrig i begyndelsen af 2020, og vi viser, hvordan data kan behandles.

Eksempel 1



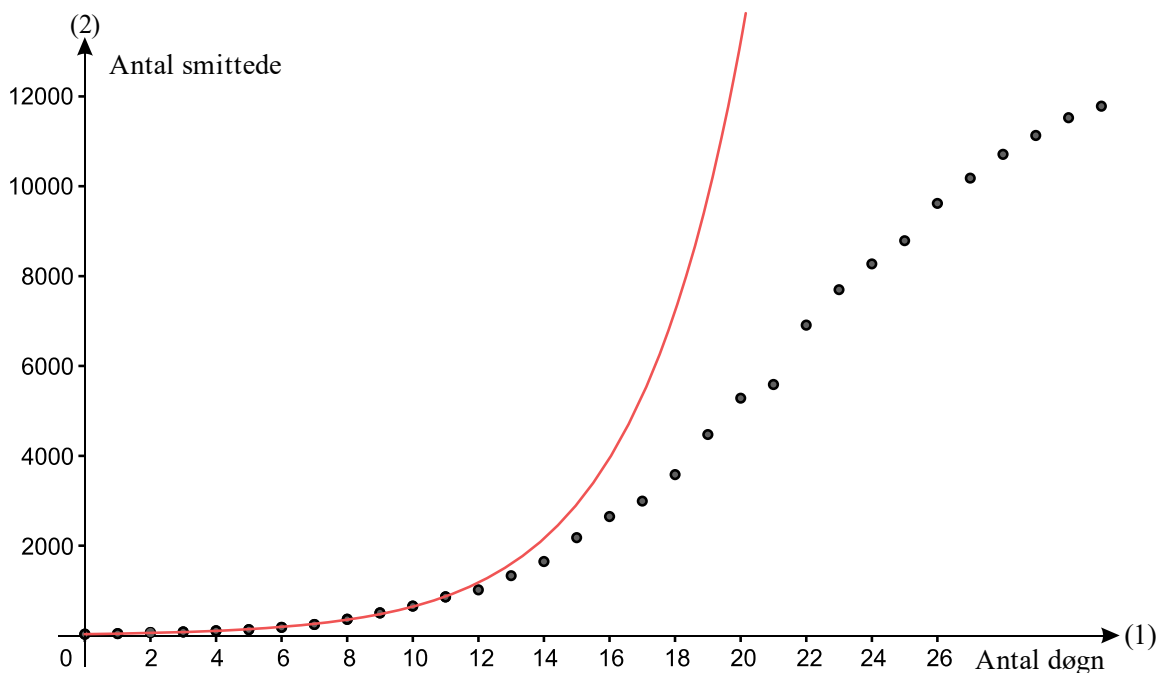
Figur 1

Figur 1 viser sammenhængen mellem antal smittede med Coronavirus i Østrig og antal døgn efter den 4. marts 2020. Datapunkterne er vist som sorte prikker, og den røde kurve er graf for den eksponentielle regressionsmodel.

Ifølge figur 1 ser den eksponentielle model ud til at give en god beskrivelse af udviklingen i antal smittede.

11 døgn efter den 4. marts begyndte Østrig at indføre forskellige restriktioner for at begrænse smittespredningen. På figur 2 på næste side ses udviklingen i antal smittede den første måneds tid efter den 4. marts.

Eksempel 1 (fortsat)



Figur 2

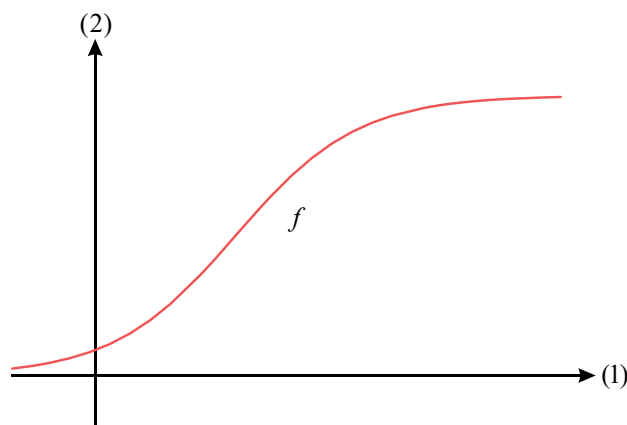
Figur 2 viser punktplot med alle datapunkterne og den eksponentielle vækstmodel fra den første fase. Vi ser tydeligt, at udviklingen i antallet af smittede ikke fortsætter med at være eksponentiel. Udviklingen i antal smittede går over i en anden fase, hvor væksten er langsommere. Det viser sig, at udviklingen i antal smittede med Coronavirus i Østrig kan beskrives ved en *logistisk vækstfunktion* (se definition 1, eksperiment 1 og øvelse 1 nedenfor).

Definition 1

Forskriften for en *logistisk vækstfunktion* kan skrives på formen

$$f(x) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-k \cdot x}},$$

hvor $f(x)$ normalt betegner antallet af individer i en population til tidspunktet x .



I dette materiale vil vi kun undersøge logistiske vækstfunktioner, hvor konstanterne M , c og k er positive. Desuden vil vi i konkrete eksempler altid beskrive udviklingen fra og med tidspunktet $x = 0$.

Meget forskellige fænomener som penge i banken til fast rente og befolkningsvækst kan beskrives med en eksponentiel model. I dette materiale ser vi på logistiske modeller. Fælles for dem er, at væksten i starten er tilnærmelsesvis eksponentiel, men senere begrænses af ydre faktorer. Væksten i antallet af individer i en population kan begrænses af pladmangel, næringsmangel eller sygdom. Størrelser som højden eller vægten af et enkeltindivid kan ikke vokse ubegrænset hele livet. Antallet af smittede i en population har en *øvre grænse*. Der kan ikke smittes flere individer, end der er i populationen. Tilsvarende er populationens størrelse en øvre grænse for spredningen af et rygte.

Bemærkning: I dette materiale og til skriftlig eksamen vil funktionsforskriften være oplyst på den form, der er angivet i definition 1. I den matematiske litteratur og i forskellige CAS-værktøjer optræder der andre måder at skrive forskriften på, men reelt er det samme funktionstype. Vi anfører her to andre skrivemåder

$$f(x) = \frac{M}{1 + c \cdot a^{-x}} \quad \text{eller} \quad f(x) = \frac{M \cdot a^x}{a^x + c}.$$

Til skriftlig eksamen vil der ikke være noget krav om at aflevere forskriften på en bestemt måde.

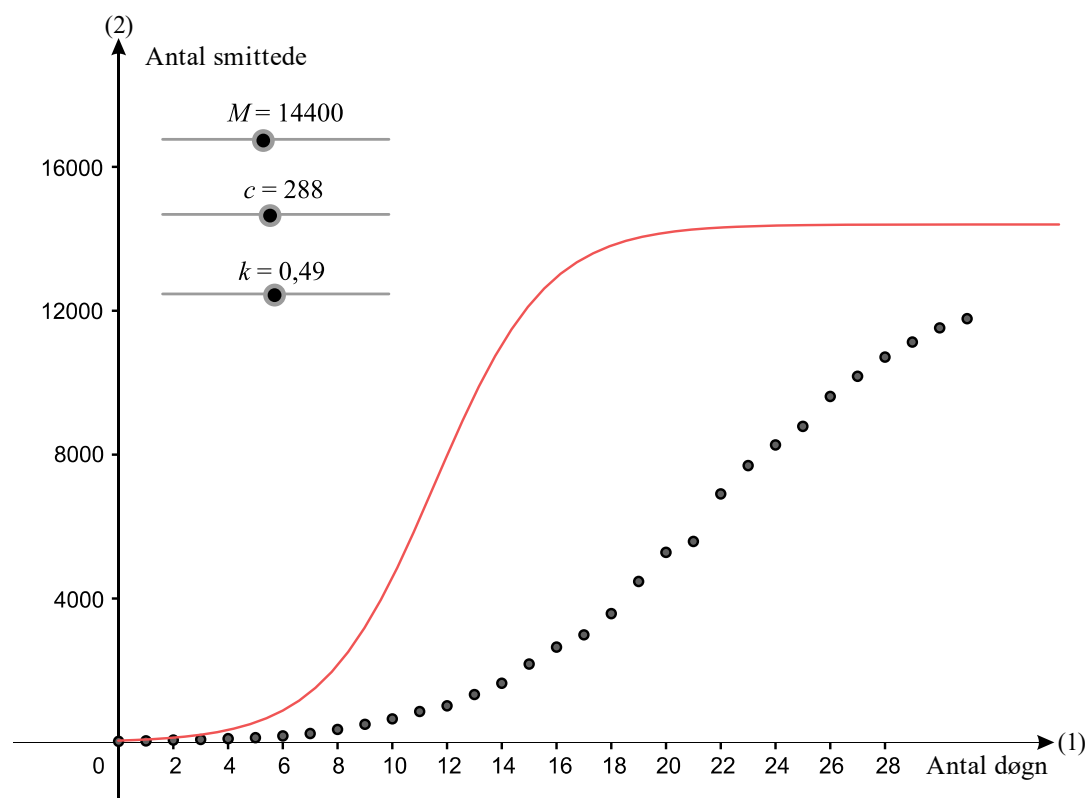
Eksperiment 1

- Tegn punktplot for antal smittede med Coronavirus i Østrig fra 4. marts 2020 og 31 døgn frem. Alle datapunkterne findes i den vedhæftede fil: Østrig_data.
- Opret skydere for parametrene M , c og k i den logistiske vækstfunktion

$$f(x) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-k \cdot x}}.$$

Brug intervallerne $10000 \leq M \leq 20000$, $100 \leq c \leq 500$ og $0 \leq k \leq 1$.

- Tegn grafen (rød) for f , for eksempel svarende til de værdier af M , c og k , der står på figur 3.
- Variér værdierne af M , c og k ved hjælp af skyderne, indtil den røde graf går så tæt som muligt på alle datapunkterne.



Figur 3

I eksperiment 1 så vi, hvordan grafen for en logistisk vækstfunktion ser ud. Denne graf beskrives ofte som en *S-kurve*.

De fleste CAS-værktøjer indeholder en regressionstype, der hedder *logistisk regression*.

Øvelse 1

Vi ser på udviklingen i antal smittede med Coronavirus i Østrig som beskrevet i eksempel 1.

- Udfør logistisk regression på alle datapunkterne (se filen Østrig_data).
- Tegn punktplot for antal smittede, og tegn regressionskurven i det samme koordinatsystem.

Eksperiment 2: Simulering af smittespredning

En af eleverne på et matematikhold tænkes at være blevet smittet med en virus. Lad os sige, at det er elev nr. 8. I første omgang smitter denne elev én af de andre elever på holdet. Lad os sige, at det er elev nr. 21. I næste omgang smitter både elev nr. 8 og elev nr. 21 hver en tilfældig elev på holdet. Hvis man smitter en elev, som i forvejen er smittet, sker der ikke noget.

På denne måde fortsættes smittespredningen. Der fortsættes, indtil alle elever på holdet er smittet.

Denne smittespredning skal nu simuleres:

Eleverne på et matematikhold får alle et nummer 1, 2, 3,

I den følgende beskrivelse antages, at der er 28 elever på holdet.

Alle eleverne rejser sig op. Ved hjælp af en tilfældighedsgenerator udtrækker læreren et tilfældigt nummer mellem 1 og 28, begge inklusive. Den udtrukne elev – som altså er smittet som den første – sætter sig ned. Herefter udtrækker læreren igen et tilfældigt tal mellem 1 og 28, og eleven med dette nummer sætter sig også ned. Fordi der nu er 2 smittede, udtrækker læreren nu 2 tilfældige numre på en gang. Eleverne med disse numre sætter sig ned som tegn på at være smittede. Hvis et allerede udtrukket elevnummer kommer igen, sker der ingenting. Inden hver runde tælles, hvor mange elever der sidder ned, hvorefter læreren udtrækker dette antal tilfældige numre. Der fortsættes, indtil alle sidder ned.

Hvis eksperimentet ikke udføres, kan man benytte datafilen Rygtespredning_data.

- Udfør simuleringen på dit matematikhold, og udfyld en tabel som nedenstående.

Omgang	0	1	2	...					
Antal smittede	1								

- Tegn et punktplot med brug af dit eget holds data.
- Udfør logistisk regression på holdets data, og tegn regressionskurven ind på punktplottet.
- Forklar, hvorfor regressionskurven må forventes at følge grafen for $g(x) = 2^x$ i starten.

2. Startværdi og øvre grænse

Når en eksponentiel model $f(x) = b \cdot a^x$ anvendes til at beskrive en befolkningsvækst, vil konstanten b angive befolkningens startværdi ifølge modellen. I det følgende vil vi se på, hvordan vi kan bestemme startværdien for en logistisk vækstfunktion.

Eksempel 2

I en by kan udviklingen i befolkningstallet $f(x)$ beskrives ved den logistiske vækstfunktion

$$f(x) = \frac{28400}{1 + 15 \cdot e^{-0,051 \cdot x}},$$

hvor x er antal år efter 1950.

Vi udregner *startværdien* ved at indsætte $x = 0$:

$$f(0) = \frac{28400}{1 + 15 \cdot e^{-0,051 \cdot 0}} = \frac{28400}{1 + 15 \cdot 1} = \frac{28400}{16} = 1775.$$

Ifølge modellen var der altså 1775 indbyggere i byen i 1950.

Opgave 1

Højden af et bestemt træ beskrives ved en logistisk vækstfunktion med forskriften

$$f(x) = \frac{24}{1 + 11 \cdot e^{-0,14 \cdot x}},$$

hvor $f(x)$ er højden af træet, målt i meter, x år efter 1990.

- a) Bestem $f(0)$, og forklar, hvad dette tal fortæller om træets højde.



I resten af dette afsnit vil vi undersøge betydningen af konstanten M i forskriften for den logistiske vækstfunktion.

Den logistiske vækstfunktion kan ses som en udvidelse af den eksponentielle vækstmodel, hvor der tages højde for, at en realistisk vækst ikke kan fortsætte med at vokse uhæmmet. Logistisk vækst omtales også som en form for *hæmmet vækst*.

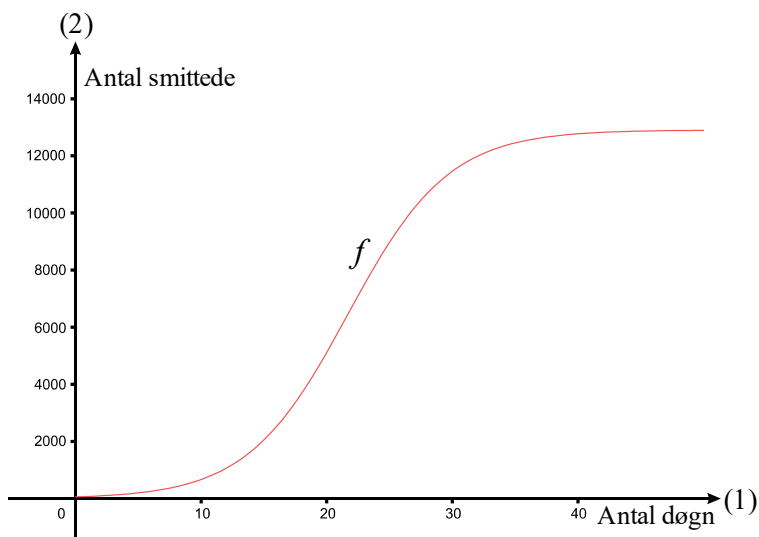
For at undersøge dette nærmere ser vi igen på modellen for udviklingen i antal smittede med Coronavirus i Østrig i marts 2020.

Eksempel 3 (fortsættelse af øvelse 1)

Den logistiske vækstfunktion, som beskriver udviklingen i antal smittede med Coronavirus i Østrig, er givet ved

$$f(x) = \frac{12905}{1 + 222,4 \cdot e^{-0,25 \cdot x}}.$$

For denne funktion er $M = 12905$. Vi tegner grafen for f og får vist en funktionstabel.



x	$f(x)$
20	5165,1
30	11491,5
40	12776,0
50	12894,3
60	12904,1
70	12904,93
80	12904,994
90	12904,9995

Figur 4

Vi kan se, at grafen for store x -værdier flader ud, og i tabellen ses, at y -værdierne vokser op mod 12905 – men uden at nå 12905 – når x vokser stadig mere.

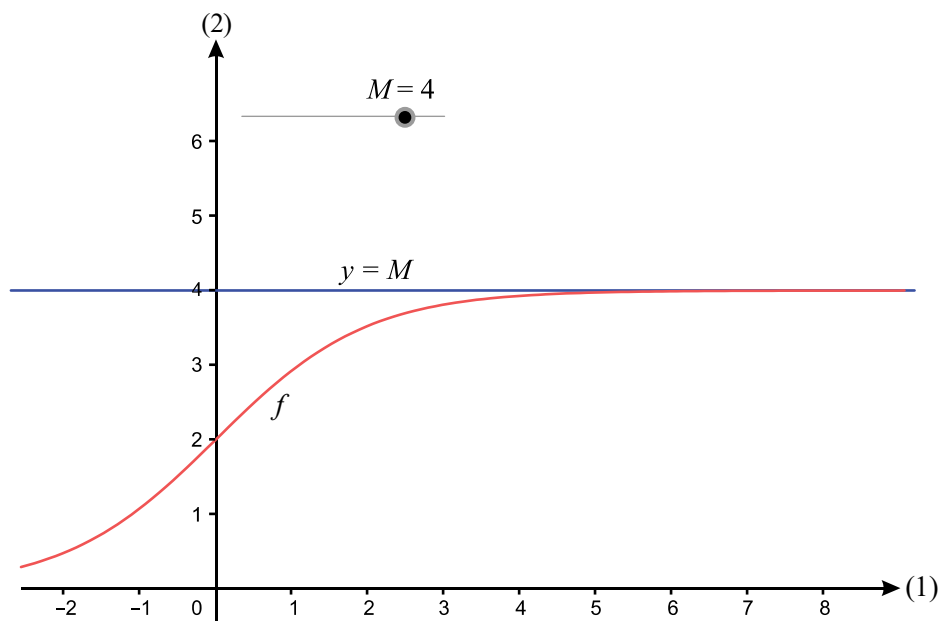
Det ser ud til, at antal smittede ifølge modellen nærmer sig $M = 12905$.

Forsøger vi at løse ligningen $f(x) = 12905$ ved hjælp af CAS-værktøjet, får vi at vide, at ligningen ikke har nogen løsninger.

Øvelse 2

- Tegn grafen for f fra eksempel 3 i intervallet $0 \leq x \leq 100$, og sammenlign med figur 4.
- Bestem $f(100)$. Du skal bestemme tallet med mindst 6 decimaler.
- Tegn linjen med ligning $y = 12905$ i samme koordinatsystem som grafen for f . Kommentér.

Eksperiment 3



Figur 5

- Tegn grafen for den logistiske funktion $f(x) = \frac{M}{1 + e^{-x}}$, hvor M er en konstant, der kan varieres med en skyder i intervallet $0 \leq M \leq 5$.
- Tegn linjen med ligningen $y = M$ i samme grafvindue.
- Variér værdien af M , og observer, hvordan grafen ændrer sig. Hvad kan du konkludere?

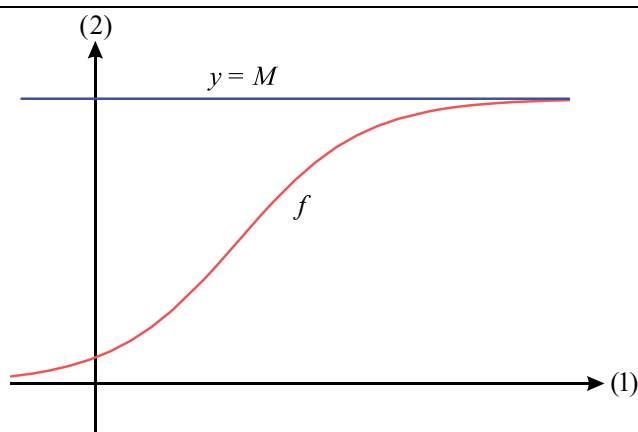
Eksperiment 3 leder frem til følgende sætning.

Sætning 1

For den logistiske vækstfunktion f givet ved

$$f(x) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-k \cdot x}}$$

er konstanten M den øvre grænse for vækstfunktionen.



Eksempel 4 (fortsættelse af eksempel 3 og øvelse 2)

Den logistiske vækstfunktion $f(x) = \frac{12905}{1 + 222,4 \cdot e^{-0,25 \cdot x}}$ beskriver udviklingen i antal smittede med

Coronavirus i Østrig. Ifølge sætning 1 er $M = 12905$ den øvre grænse for antallet af smittede. Det vil sige, at antallet af smittede ifølge modellen vil komme tættere og tættere på 12905.

Sammenlign med grafen i øvelse 2.

Vi skal nu se på en model for vægten af en kylling som funktion af tiden.

Opgave 2

Vægten af en kylling af en bestemt race kan beskrives ved modellen

$$f(x) = \frac{3190}{1 + 29,5 \cdot e^{-0,113x}},$$

hvor $f(x)$ er vægten af kyllingen, målt i gram, når den er x dage gammel.

- a) Forklar, hvad tallet 3190 fortæller om udviklingen i kyllingens vægt.



Opgave 3

I en model beskrives udviklingen i befolkningstallet i USA ved modellen

$$f(x) = \frac{184,766}{1 + 48,334 \cdot e^{-0,0322x}},$$

hvor $f(x)$ er befolkningstallet i USA (målt i mio.) x år efter 1790.

- a) Hvor stort var befolkningstallet i USA i 1790 ifølge modellen?
b) Hvad er den øvre grænse for befolkningstallet ifølge modellen?



3. Grænseværdi og asymptote

For den logistiske vækstfunktion

$$f(x) = \frac{12905}{1 + 222,4 \cdot e^{-0,25 \cdot x}}$$

i eksempel 3 fandt vi blandt andet funktionstabellen, som ses til højre. Vi kan se, at funktionsværdierne nærmer sig 12905, når x -værdien bliver større og større.

Dette har vi et matematisk begreb for.

Vi siger, at *grænseværdien* af $f(x)$ er 12905, når x går mod uendelig.

Det matematiske symbol for denne grænseværdi er

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12905}{1 + 222,4 \cdot e^{-0,25 \cdot x}} = 12905.$$

Symbolet $\lim$ er en forkortelse af det latinske ord for grænse (limes) eller engelsk limit.

Man anvender også følgende notation

$$\frac{12905}{1 + 222,4 \cdot e^{-0,25 \cdot x}} \rightarrow 12905 \text{ for } x \rightarrow \infty.$$

Betydningen er den samme: funktionsværdien går mod 12905, når x går mod uendelig.

x	$f(x)$
20	5165,1
30	11491,5
40	12776,0
50	12894,3
60	12904,1
70	12904,93
80	12904,994
90	12904,9995

Øvelse 3

- Undersøg, hvordan du bestemmer grænseværdien på dit CAS-værktøj. Se bilag 1 og bilag 2.
- Bestem grænseværdien for den logistiske vækstfunktion fra opgave 2, dvs.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3190}{1 + 29,5 \cdot e^{-0,113x}}.$$

Kommentér resultatet.

Opgave 4

I et laboratorieforsøg undersøges, hvordan en bakteriekoloni udvikler sig med tiden. Det viser sig, at udviklingen i antallet af bakterier kan beskrives ved den logistiske vækstfunktion



$$f(x) = \frac{9560}{1 + 4,6 \cdot e^{-0,0898x}},$$

hvor $f(x)$ er antallet af bakterier x timer efter forsøgets start.

- Tegn grafen for f i vinduet $[0;100] \times [0;10000]$.
- Bestem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, og forklar, hvad dette tal fortæller om udviklingen i antal bakterier.

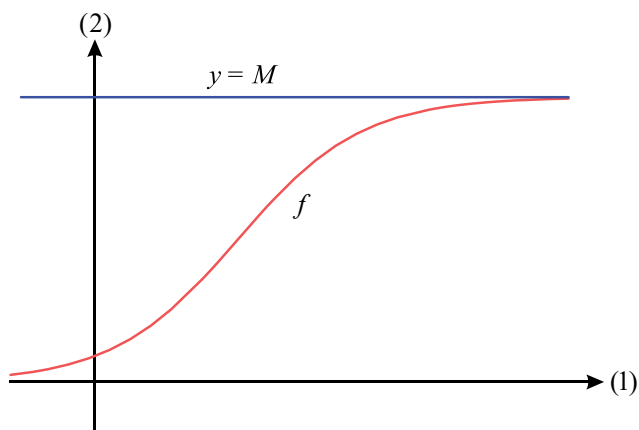
I eksperiment 3 så vi, at grafen for en logistisk funktion flader ud, når x går mod uendelig. Grafen nærmer sig altså en vandret linje. En sådan linje kaldes en *vandret asymptote* til grafen for funktionen.

Sætning 2

For den logistiske vækstfunktion f givet ved

$$f(x) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-k \cdot x}}$$

er linjen med ligningen $y = M$ vandret asymptote til grafen for f for $x \rightarrow \infty$.



Eksempel 5

Udviklingen i en ugles vægt kan beskrives ved den logistiske vækstfunktion

$$f(x) = \frac{830,5}{1 + 11,34 \cdot e^{-0,14 \cdot x}},$$

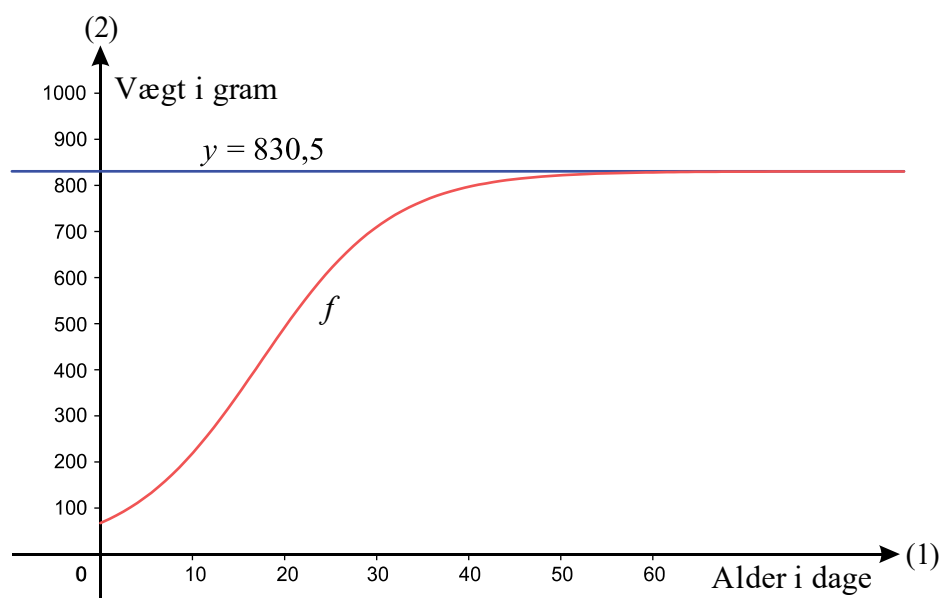
hvor $f(x)$ er vægten af ugle, målt i gram, når den er x dage gammel.

Med CAS-værktøjet bestemmes grænseværdien af $f(x)$ for $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 830,5.$$

Det vil sige, at ifølge modellen vil uglens vægt nærme sig 830,5 gram, når den bliver ældre og ældre. Det betyder også, at linjen med ligningen $y = 830,5$ er vandret asymptote til grafen for f for $x \rightarrow \infty$. Grafisk viser det sig ved, at grafen for f og asymptoten er næsten sammenfaldende for store x -værdier.

Nedenstående figur illustrerer dette. Her ses grafen for f samt den vandrette asymptote.



Figur 6

Opgave 5

I en kasse lever nogle bananfluer. Udviklingen i antallet af bananfluer i kassen beskrives ved den logistiske vækstfunktion f givet ved

$$f(x) = \frac{700}{1 + 69 \cdot e^{-0,22 \cdot x}},$$

hvor $f(x)$ er antallet af bananfluer efter x døgn.

- Bestem antallet af bananfluer efter 0 døgn og efter 40 døgn.
- Bestem en ligning for den vandrette asymptote til grafen for f for $x \rightarrow \infty$.
- Tegn grafen for f og asymptoten i samme koordinatsystem.



Opgave 6



Tabellen viser højden af en solsikke på forskellige tidspunkter.

Antal døgn	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
Højde (cm)	17,9	36,4	67,8	98,1	131,0	169,5	205,5	228,3	247,1	250,5	253,8	254,5

Tabellens 12 datapunkter findes også i vedhæftede fil: Solsikke_data

Udviklingen i solsikkens højde kan beskrives ved en logistisk vækstfunktion f , hvor $f(x)$ er solsikkens højde (målt i cm) efter x døgn.

- Bestem forskriften for f ved logistisk regression.
- Efter hvor mange døgn er solsikkens højde 240 cm?
- Bestem grænseværdien $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, og giv en fortolkning af dette tal.

4. Væksthastighed

Vi vil i dette afsnit vende tilbage til modellen for udviklingen i antal smittede med Coronavirus i Østrig, og vi vil se på, hvornår antallet af smittede vokser hurtigst. Til dette skal vi bruge begrebet væksthastighed.

Eksempel 6 (fortsættelse af eksempel 4)

Udviklingen i antal smittede blev beskrevet ved funktionen

$$f(x) = \frac{12905}{1 + 222,4 \cdot e^{-0,25 \cdot x}},$$

hvor $f(x)$ er antal smittede med Coronavirus i Østrig efter x døgn.

Vi bestemmer den afledede

$$f'(x) = \frac{717518 \cdot 1,284^x}{(1,284^x + 222,4)^2}.$$

Bemærk, at denne forskrift kan skrives på mange forskellige måder afhængigt af, hvilket CAS-værktøj man anvender.

Ved beregning fås $f'(10) = 158,8$.

Væksthastigheden på dag 10 er altså ca. 159 personer pr. døgn.

Udtrykt på en anden måde:

På dag 10 voksede antallet af smittede med ca. 159 personer pr. døgn.

Ekperiment 4 (fortsættelse af eksempel 6)

- a) Bestem væksthastigheden til de tidspunkter, der er anført i nedenstående tabel. Brug gerne et regneark.

x	10	15	20	25	30
$f'(x)$					

- b) Bestem flere væksthastigheder i intervallet $10 \leq x \leq 30$, og prøv på den måde at finde frem til, hvornår væksthastigheden er størst.

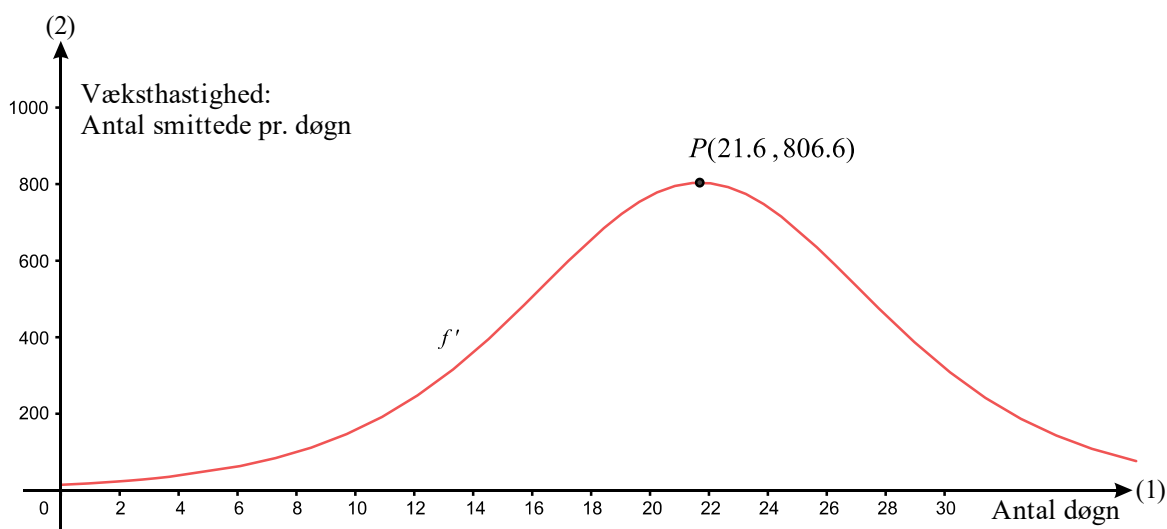
I det næste eksempel vil vi beskrive en grafisk metode til at bestemme den størst mulige væksthastighed.

Eksempel 7 (fortsættelse af eksempel 6 og eksperiment 4)

Vi ønsker at bestemme tidspunktet, hvor antal smittede vokser hurtigst. Forskriften for f er

$$f(x) = \frac{12905}{1 + 222,4 \cdot e^{-0,25 \cdot x}}.$$

Vi tegner grafen for f' .



Figur 7

Vi kan se, at væksthastigheden er lille ved periodens begyndelse. Herefter bliver væksthastigheden større og større indtil et vist tidspunkt, for så igen at blive mindre og mindre.

Vi vil nu bestemme den størst mulige væksthastighed for f . Grafen for f' har ét ekstremumspunkt. Dette kan bestemmes ved hjælp af grafværktøjet, og vi får koordinatsættet $(21.6, 806.6)$.

Den størst mulige væksthastighed for f er altså ca. 807 personer pr. døgn, og den forekommer ca. 22 døgn efter 4. marts.

Opgave 7

I 2014-2016 var befolkningen i Sierra Leone ramt af en epidemi af sygdommen Ebola. I en model beskrives udviklingen i antallet af Ebola-ramte ved den logistiske vækstfunktion

$$f(x) = \frac{13080}{1 + 74,19 \cdot e^{-0,0227x}},$$

hvor $f(x)$ er antallet af Ebola-ramte x døgn efter målingens start.

- Bestem antallet af Ebola-ramte ved målingens start.
- Bestem $f'(x)$.
- Tegn grafen for den afledede funktion f' i intervallet $0 \leq x \leq 500$.
- Bestem den største væksthastighed for antallet af Ebola-ramte.



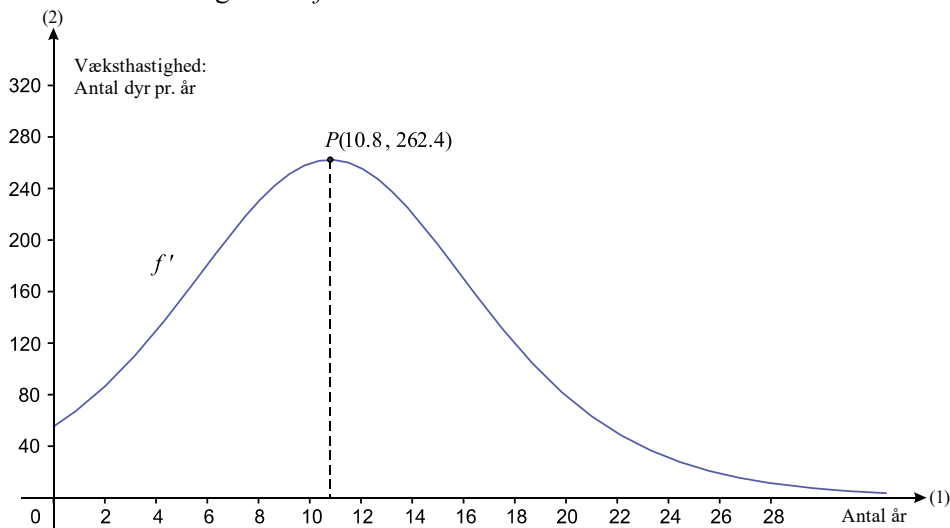
Eksempel 8

Udviklingen i antallet af dyr i et lukket område kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = \frac{4000}{1 + 17 \cdot e^{-0,2624x}},$$

hvor $f(x)$ er antallet af dyr til tiden x , målt i antal år.

Vi ønsker at bestemme tidspunktet, hvor antallet af dyr vokser hurtigst. Vi bestemmer $f'(x)$ og tegner grafen for væksthastigheden f' .



Figur 8

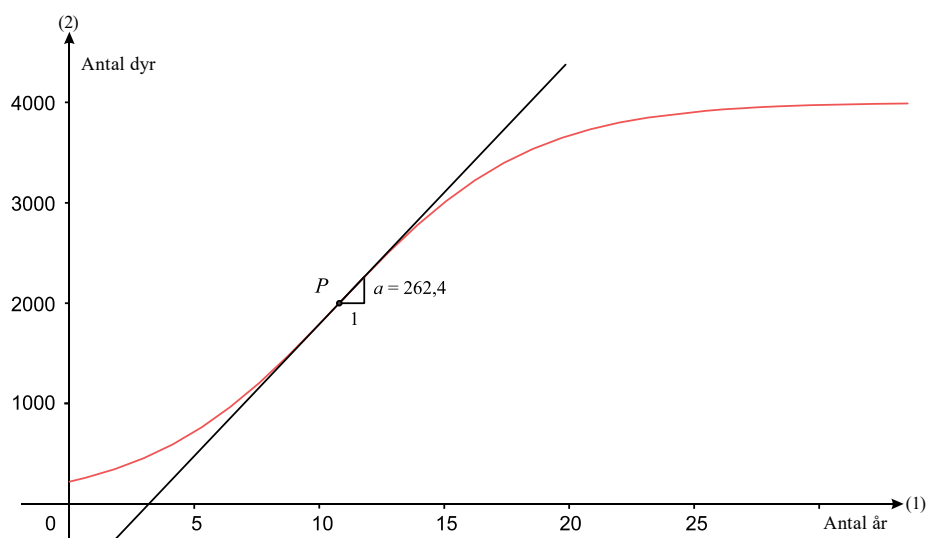
På grafen aflæses, at væksthastigheden er størst efter $x = 10,8$ år. Antallet af dyr vokser derfor hurtigst på dette tidspunkt. Den maksimale væksthastighed er

$$f'(10,8) = 262,4, \text{ dvs. der kommer ca. 262 flere dyr pr. år på dette tidspunkt.}$$

Antallet af dyr på dette tidspunkt er

$$f(10,8) = 2000.$$

Vi illustrerer dette grafisk.



Figur 9

På figur 9 ses grafen for funktionen f samt tangenten til grafen for f i punktet $P(10.8, 2000)$, hvor væksthastigheden er størst. Hældningen af denne tangent er netop 262,4.

Opgave 8

Udviklingen i antallet af brugere med et mobilt internetabonnement i verden kan beskrives ved den logistiske vækstfunktion



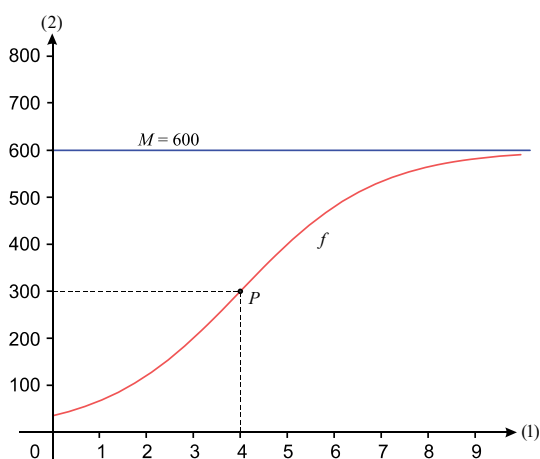
$$f(x) = \frac{6,38}{1 + 9,54 \cdot e^{-0,460x}},$$

hvor $f(x)$ er antallet af brugere, målt i mia., x år efter 2010.

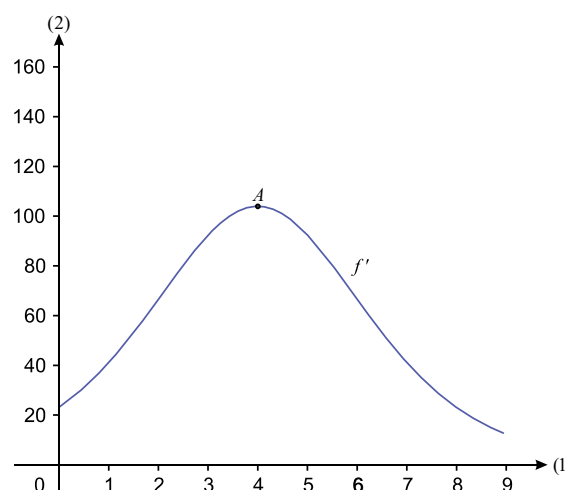
- Bestem $f'(x)$.
- Bestem $f'(4)$, og giv en fortolkning af dette tal.
- Tegn grafen for den afledede funktion f' i intervallet $0 \leq x \leq 10$.
- Bestem det tidspunkt, hvor væksthastigheden for antallet af brugere er størst.

I eksempel 7 og 8 så vi, hvordan den størst mulige væksthastighed kan bestemmes. I eksempel 9 og eksperiment 5 vil vi undersøge sammenhængen mellem den størst mulige væksthastighed og konstanten M i forskriften for f .

Eksempel 9



Figur 10



Figur 11

Figur 10 viser grafen for den logistiske funktion $f(x) = \frac{M}{1 + 16 \cdot e^{-0,6931471x}}$, hvor $M = 600$.

Figur 11 viser grafen for den afledede funktion f' , dvs. udviklingen i væksthastigheden. På figur 11 ser vi, at punktet $A(4, 104)$ er maksimumspunktet for f' .

Det punkt P på grafen for f , der har samme førstekoordinat som A , er givet ved $P(4, 300)$. På figur 10 ses, at grafen for f er stejlest i P .

Eksperiment 5 (fortsættelse af eksempel 9)

- a) Variér værdien af M , og læg mærke til sammenhængen mellem M og andenkoordinaten til punktet P . Udfyld evt. et skema som nedenstående for at skabe overblik.

M	600	700	800	900	1000
P	(4, 300)				

- b) Hvilken sammenhæng ser der ud til at være mellem den øvre grænse M og andenkoordinaten til P ?

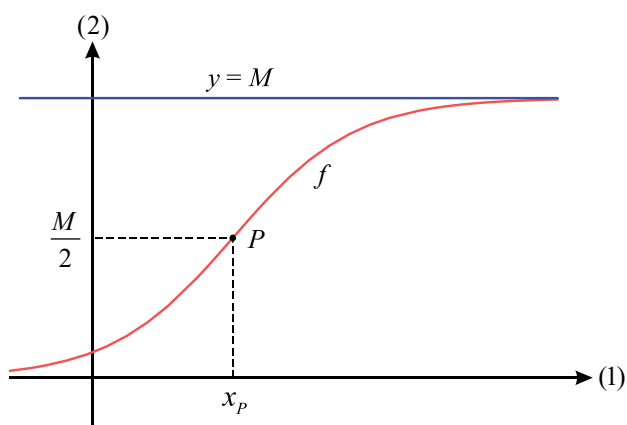
Konklusionen på eksperiment 5 er, at tangentens hældning er størst i det punkt P på grafen for f , hvor $y = \frac{M}{2}$. Det vil sige, at væksthastigheden er størst, når vækstfunktionen er nået halvvejs op til den øvre grænse.

Sætning 3

Lad en logistisk vækstfunktion f være givet ved

$$f(x) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-k \cdot x}}.$$

Væksthastigheden for f er størst til tidspunktet x_p , hvor vækstfunktionen er nået halvvejs op til den øvre grænse M .



Opgave 9

Tabellen viser antallet af influenzaindlæggelser i USA.



Antal uger	0	1	...	14	15
Antal indlæggelser (pr. 100000)	4,5	6,3	...	67,2	68,5

Alle tabellens 16 datapunkter findes i vedhæftede fil: *Influenza_data*

Udviklingen i antallet af influenzaindlæggelser kan beskrives ved en logistisk vækstfunktion f , hvor $f(x)$ er antallet af influenzaindlæggelser pr. 100000 indbyggere x uger efter 4. januar 2020.

- Bestem en forskrift for f ved logistisk regression.
- Tegn grafen for f .
- Bestem tidspunktet x_p , hvor antallet af influenzaindlæggelser voksede hurtigst.

Eksempel 10 (fortsættelse af eksempel 6)

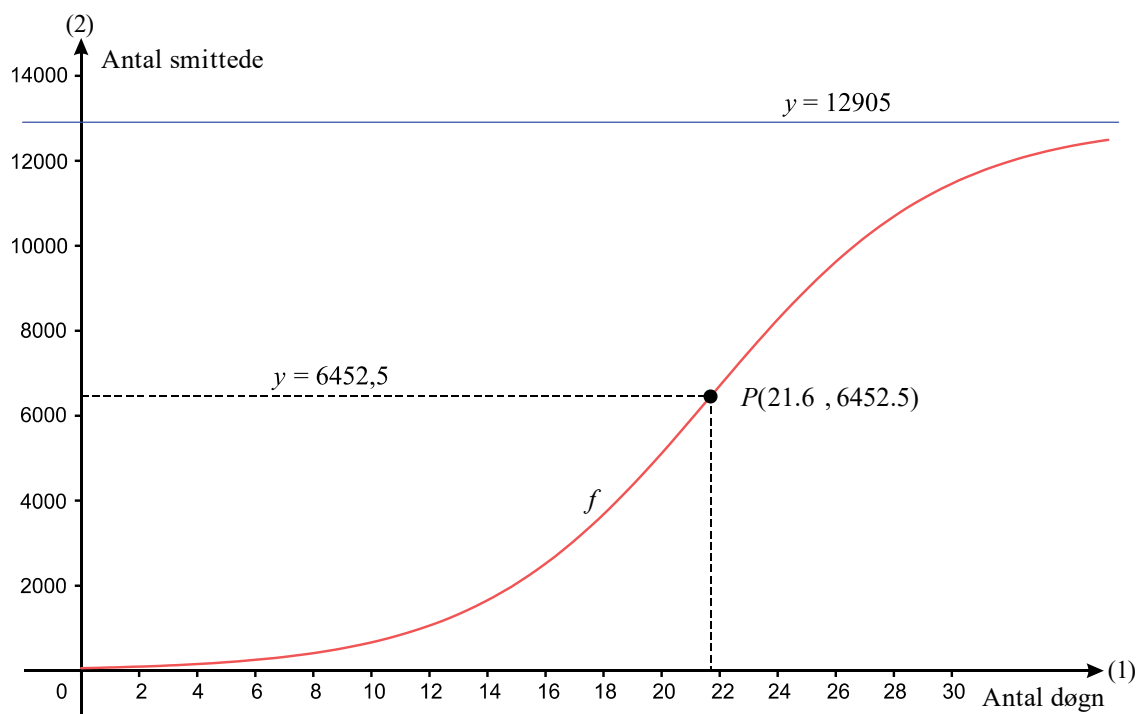
I modellen for udviklingen i antal smittede med Coronavirus i Østrig kan vi nu bestemme den største væksthastighed ved hjælp af sætning 3. Forskriften for vækstfunktionen er

$$f(x) = \frac{12905}{1 + 222,4 \cdot e^{-0,25 \cdot x}}.$$

Da $M = 12905$, vil væksthastigheden være størst, når

$$y = \frac{12905}{2} = 6452,5.$$

Vi skal altså bestemme det tidspunkt x_p , hvor $f(x_p) = 6452,5$. Vi løser denne ligning grafisk. Vi tegner grafen for f samt linjen med ligningen $y = 6452,5$ og bestemmer skæringspunktet P mellem grafen for f og linjen.



Figur 12

Det ses, at løsningen til ligningen er $x_p = 21,6$.

Vi kan nu bestemme den største væksthastighed ved at indsætte denne værdi i $f'(x)$:

$$f'(21,6) = 806,6.$$

Den største væksthastighed er altså 806,6 smittede pr. døgn. Tallet er identisk med det resultat, vi fik i eksempel 7.

Opgave 10



Figur 13

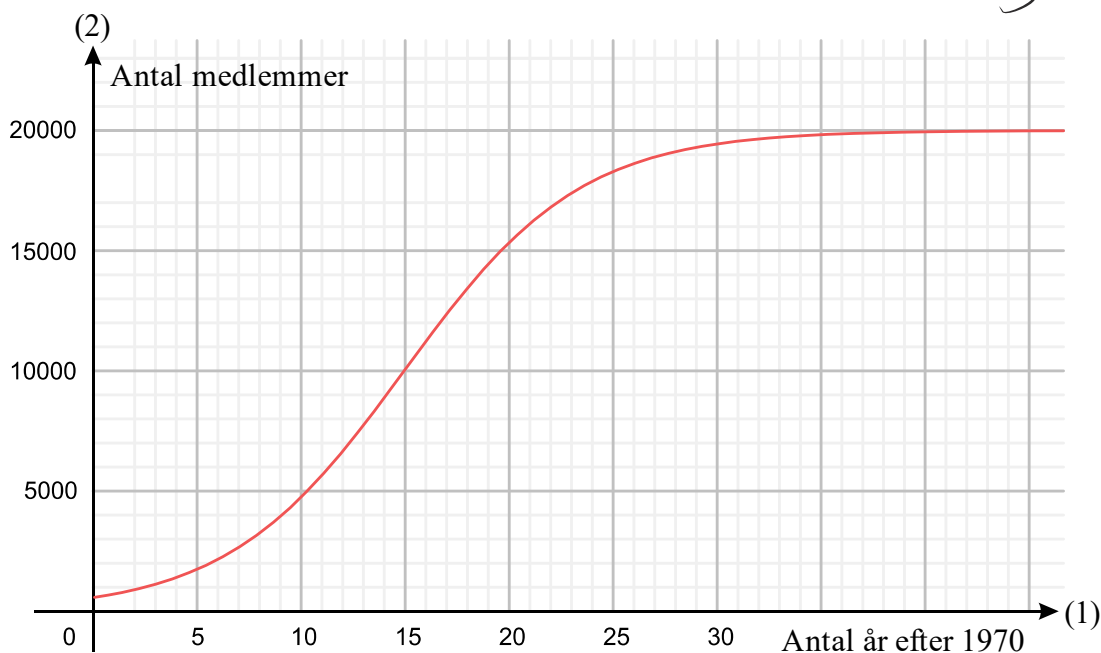
I en model kan længden af en bestemt type grønne leguaner som funktion af deres alder beskrives ved en logistisk vækstfunktion. Længden måles i cm, og alderen måles i år.

Det oplyses, at væksthastigheden for leguanens længde er størst efter to et halvt år, og leguanens længde til dette tidspunkt er 80 cm.

- a) Bestem længden af en fuldt udvokset grøn leguan ifølge modellen. Begrund dit svar.



Opgave 11



Figur 14

Udviklingen i antallet af medlemmer i en forening beskrives ved en logistisk vækstfunktion f , hvor $f(x)$ er antallet af medlemmer x år efter 1970.

Figur 14 viser grafen for f .

- a) Bestem ved aflæsning tidspunktet, hvor antallet af medlemmer voksede hurtigst.



Opgave 12

Udviklingen i antallet af influenzaramte elever på en stor skole som funktion af antal døgn efter en influenzaepidemis udbrud beskrives ved en logistisk vækstfunktion.

Væksthastigheden var størst på dag 9. Da var antallet af smittede 400.

- a) Bestem den øvre grænse for antallet af influenzaramte elever.

Opgave 13

I en model beskrives udviklingen i indbyggertallet i en by ved en logistisk vækstfunktion f med forskriften

$$f(x) = \frac{30000}{1 + 34 \cdot e^{-0,157x}},$$

hvor $f(x)$ er byens indbyggertal x år efter 1960.

- Bestem den øvre grænse for byens indbyggertal ifølge modellen.
- Bestem ved beregning det tidspunkt, hvor væksthastigheden for byens indbyggertal er størst.
- Bestem ved beregning denne største væksthastighed.

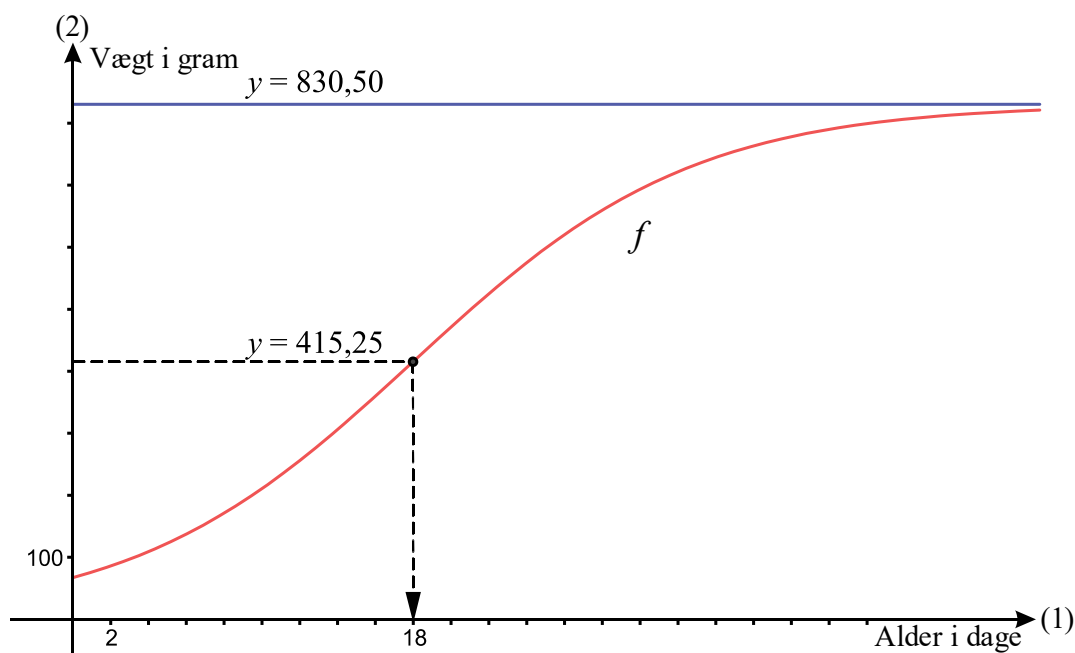


Eksempel 11

Udviklingen i en ugles vægt kan beskrives ved den logistiske vækstfunktion

$$f(x) = \frac{830,5}{1 + 11,34 \cdot e^{-0,135x}},$$

hvor $f(x)$ er vægten af uglen, målt i gram, når den er x dage gammel.



Figur 15

Vi kan ved hjælp af grafen se, at væksthastigheden er størst, når uglen er 18 dage gammel.

Denne største væksthastighed er $f'(18) = 28$, dvs. en 18 dage gammel ugles vægt vokser med 28 gram pr. dag.

Vi vil nu undersøge, hvornår væksthastigheden er 25 gram pr. dag. Vi løser derfor ligningen $f'(x) = 25$ og får $x = 13$ eller $x = 23$. Der er altså to tidspunkter, hvor uglens vægt vokser med 25 gram pr. dag. Vi bemærker, at disse to tidspunkter ligger lige lang tid før og efter det tidspunkt, hvor væksthastigheden er størst (5 dage før og 5 dage efter).

Ekseperiment 6 (fortsættelse af eksempel 11)

Ovenfor har vi løst ligningen $f'(x) = 25$.

- Løs den tilsvarende ligning for mindst to andre væksthastigheder end 25. Vælg selv.
- Formulér en regel for, hvordan de to løsninger ligger i forhold til det tidspunkt $x = 18$ dage, hvor væksthastigheden er størst.

Konklusionerne i eksempel 11 og eksperiment 6 er generelt gyldige:

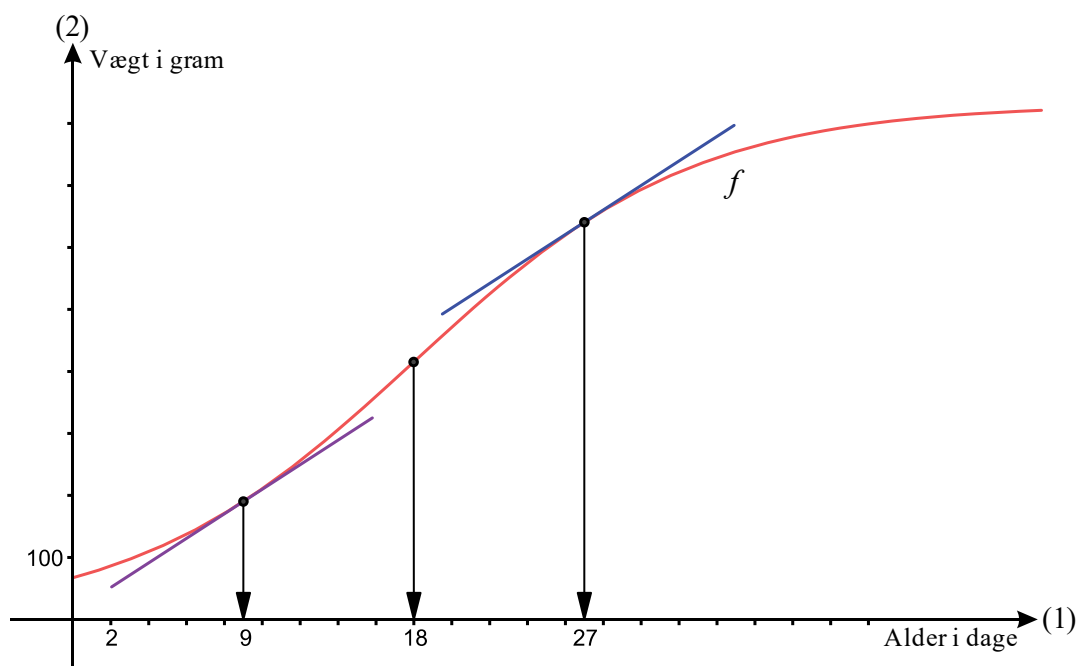
Væksthastigheden for logistisk vækst er den samme til to tidspunkter, der ligger lige lang tid før og efter det tidspunkt, hvor væksthastigheden er størst.

Eksempel 12 (fortsættelse af eksempel 11 og eksperiment 6)

I dette eksempel skal vi belyse ovenstående konklusion med en grafisk fortolkning.

At bestemme de tidspunkter, hvor væksthastigheden for uglens vægt $f(x)$ er 19,8 gram pr. dag, kan oversættes til at bestemme de tangenter til grafen for f , der har hældningskoefficienten 19,8. Ved at løse ligningen $f'(x) = 19,8$ finder vi, at x -værdierne til tangenternes røringspunkter er $x = 9,0$ og $x = 27,0$.

Vi tegner derfor tangenten til grafen for f i hvert af de to tilsvarende punkter på grafen.



Figur 16

Vi lægger mærke til, at x -værdierne til de to tangenters røringspunkter ligger lige langt fra 18, som svarer til det sted, hvor tangenthældningen er størst.

Konklusionen i eksempel 12 gælder altid:

Tangenthældningen for en logistisk vækstkurve er den samme til to tidspunkter, der ligger lige lang tid før og efter det tidspunkt, hvor væksthastigheden er størst.

Vi bemærker, at de to konklusioner ovenfor er udtryk for den samme egenskab ved logistisk vækst. Væksthastigheden varierer symmetrisk om det tidspunkt, hvor væksten går hurtigst.

Opgave 14



I en model beskrives udviklingen i antallet af brugere af sociale medier i verden ved en logistisk vækstfunktion f med forskriften

$$f(x) = \frac{3899}{1 + 2,89 \cdot e^{-0,24x}},$$

hvor $f(x)$ er antallet af brugere af sociale medier (målt i mio.) x år efter 2010.

a) Bestem $f'(x)$.

Der findes to tidspunkter, hvor væksthastigheden for antallet af brugere af sociale medier er 200 mio. brugere pr. år.

b) Bestem disse to tidspunkter.

c) Bestem det tidspunkt, hvor antallet af brugere af sociale medier vokser hurtigst.

Læg mærke til, at det tidspunkt, hvor væksthastigheden for antallet af brugere af sociale medier er størst, ligger midt imellem de to tidspunkter, hvor væksthastigheden er den samme.

Bilag 1. Vejledning til logistisk vækst i GeoGebra/WordMat

Logistisk regression

Logistisk regression udføres i GeoGebra. Åbn regnearket, og indsæt datapunkterne. Markér disse datapunkter, og vælg Regressionsanalyse:



Herefter trykkes "Analyser", og GeoGebra viser nu Data Analyse-vinduet. I menuen under Regressionsmodel vælges "Logistisk", og man kan nu se punktploget samt forskrift og graf for den logistiske vækstfunktion.

Til sidst kan det hele evt. kopieres til Tegneblokken. For at gøre dette vælges denne menu i øverste højre hjørne:



Tegning af grafen for den afledede funktion f'

Tegn grafen for funktionen f . I Inputfeltet skrives herefter $f'(x)$. GeoGebra bestemmer nu forskriften for den afledede funktion f' og tegner grafen for denne funktion. Til sidst skjules grafen for f , og grafvinduet tilpasses grafen for f' .

Bemærk, at der kan opstå et problem med regnenøjagtigheden. Dette kan undgås ved at ændre GeoGebras indstillinger til 10 decimaler i menuen Indstillinger → Afrunding. Dette skal gøres, inden forskriften for f' bestemmes.

Bestemmelse af grænseværdi

Vi vil bestemme grænseværdien af $f(x)$ for $x \rightarrow \infty$.

I WordMat defineres funktionen f . Herefter indsættes et matematikfelt. I dette felt indsættes følgende fra Design-menuen i Word

$$\lim_{x \rightarrow \infty}$$

De to tomme felter udfyldes på følgende måde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

For at bestemme grænseværdien trykkes til sidst "Beregn".

I GeoGebra kan denne grænseværdi bestemmes ved at skrive følgende kommando i Inputfeltet

Input: `Grænseværdi(f(x), ∞)`

Bilag 2. Vejledning til logistisk vækst i Nspire

Logistisk regression

Åbn Lister og Regneark, og indsæt datapunkterne.

I værktøjskassen vælges Statistik → Statistiske beregninger → Logistisk regression ($d = 0$).

Punktplot og grafen for regressionsfunktionen tegnes i 5: Diagrammer og Statistik (eller i 2: Grafer).

Tegning af grafen for den afledede funktion f'

Den afledede funktion $df(x) = f'(x)$ til en logistisk funktion f defineres på sædvanlig måde ved

$$df(x) := \frac{d}{dx}(f(x)).$$

Grafen for den afledede $f'(x)$ tegnes derefter i et passende vindue.

Bestemmelse af grænseværdi

Vi vil bestemme grænseværdien af $f(x)$ for $x \rightarrow \infty$.

Først defineres funktionen f . Fra matematikskabelonerne indsættes symbolet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))$$

De tre felter udfyldes på følgende måde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))$$

hvorpå der trykkes ENTER.

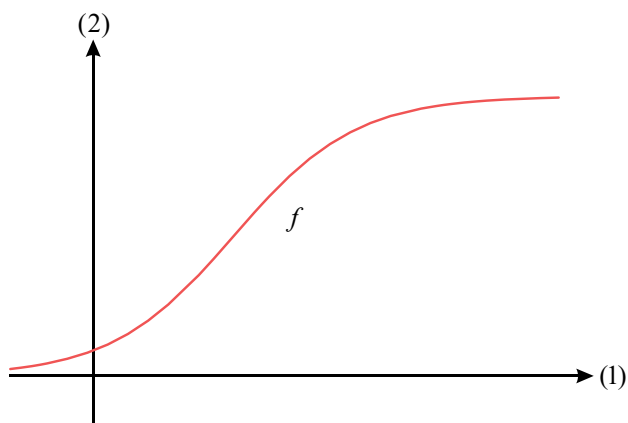
Bilag 3. Indstiksark til formelsamlingen

Definition 1

Forskriften for en *logistisk vækstfunktion* kan skrives på formen

$$f(x) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-k \cdot x}},$$

hvor $f(x)$ normalt betegner antallet af individer i en population til tidspunktet x .

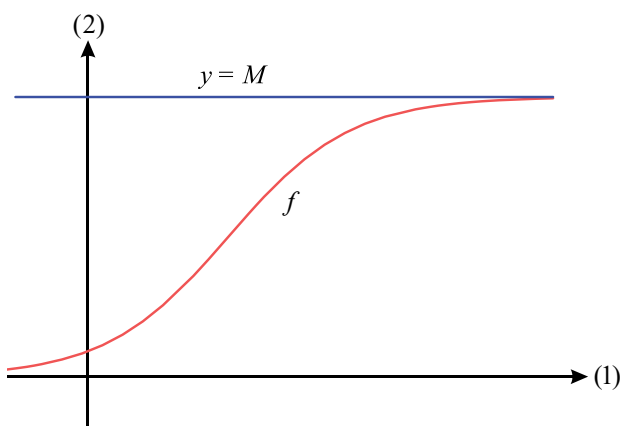


Sætning 1

For den logistiske vækstfunktion f givet ved

$$f(x) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-k \cdot x}}$$

er konstanten M den *øvre grænse* for vækstfunktionen.



Sætning 2

For den logistiske vækstfunktion f givet ved

$$f(x) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-k \cdot x}}$$

er linjen med ligningen $y = M$ vandret asymptote til grafen for f for $x \rightarrow \infty$.

Sætning 3

Lad en logistisk vækstfunktion f være givet ved

$$f(x) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-k \cdot x}}.$$

Væksthastigheden for f er størst til tidspunktet x_p , hvor vækstfunktionen er nået halvejs op til den øvre grænse M .

