UNDERVISNINGS
MINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Matematik B

Højere forberedelseseksamen

Ny ordning

Forberedelsesmateriale

ny-2hf191-MAT/B-03092018

Mandag den 3. september 2018

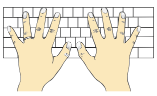
Forord

I undervisningsforløbet skal der ifølge læreplanen *afsættes 6 timers undervisningstid til forberedelse til den skriftlige prøve i faget, jf. pkt. 4.2, hvor eleverne selvstændigt arbejder med et centralt stillet forberedelsesmateriale under vejledning.*
Dette er uddybet i vejledningen: *Hvert år i løbet af august**) *offentliggøres forberedelsesmateriale til den skriftlige eksamen. Materialet indgår som en del af det supplerende stof i forløbet, og der skal trænes i opgaveregning i stoffet, fordi der i modsætning til det øvrige supplerende stof kommer opgaver i stoffet til den skriftlige eksamen.*

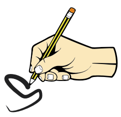
*) Det foreliggende materiale offentliggøres 3. september 2018 og er gældende for eksamen december 2018, maj-juni 2019 og august 2019.

I dette forberedelsesmateriale er emnet ”Modeller, former og design beskrevet med splejsning”.

Materialet indeholder teori, eksempler, øvelser og opgaver.
Materialet indeholder også supplerende materiale i et appendiks. Dette appendiks har titlen ”Modellering af former med splejsede grafer”.
Ved den skriftlige eksamen kan indhold og metoder fra forberedelsesmaterialet indgå i opgaver i begge delprøver. Eksaminanderne bør medbringe resultaterne af arbejdet med dette materiale til brug ved delprøve 2. Hvis der til delprøve 1 kræves kendskab til særlige definitioner og formler, vil der blive udleveret et formelark som bilag til opgavesættet. Dette formelark findes som bilag 3 i dette materiale.
Der bliver ikke stillet opgaver i det supplerende materiale i appendiks og bilag.



Opgaverne markeret med et tastatur kan kun forekomme i delprøve 2.



Opgaverne markeret med hånd og blyant kan forekomme i begge delprøver.

Hf matematik B

Forberedelsesmateriale

Modeller, former og design beskrevet med splejsning

December 2018, maj/juni 2019 og august 2019

Indhold

Indledning

Dette forberedelsesmateriale handler om *modeller, former og design beskrevet med splejsning*.

I forberedelsesmaterialet er der både øvelser, eksperimenter og opgaver. Øvelserne er tænkt som hjælp til forståelse af teorien og metoderne. Opgaverne er tænkt som forberedelse til de opgaver, der kommer til den skriftlige eksamen. Det anbefales at arbejde med øvelser og eksperimenter tidligt i forløbet som et led i opbygningen af forståelsen. På et senere tidspunkt i forløbet og ved eksamenslæsning kan man koncentrere sig om at læse den egentlige tekst.

Øvelser og eksperimenter er markeret med blå margenlinje.

Eksempler er markeret med grøn margenlinje.

Opgaver er markeret med rød margenlinje.

Vigtige definitioner og sætninger er markeret med en sort ramme om teksten.

Arbejdet med forberedelsesmaterialet forudsætter brug af et computerbaseret matematisk værktøjs-program med CAS. I dette materiale omtales det blot som et CAS-værktøj.

Forberedelsesmaterialet er suppleret med et appendiks om modellering af former med splejsede grafer. Til dette appendiks hører bilag (GeoGebra og Nspire) om, hvordan man henter et billede ind i et koordinatsystem i CAS-værktøjet og tilpasser akserne, så objektet på billedet kan udmåles.
Elever, der bliver hurtigt færdige med materialet eller har brug for yderligere udfordringer, kan arbejde videre med dette afsnit.

1. Hvad er splejsning?

Når en designer eller arkitekt vil formgive et objekt (fx et glas eller en bil), så starter processen ofte med, at designeren laver en matematisk model for en mulig *kontur* (dvs. en del af et omrids eller tværsnit) af det ønskede objekt. Den matematiske model laves ofte ved at sammenstykke forskellige geometriske figurer eller sammenstykke grafer for forskellige funktioner. Denne proces vil vi kalde *splejsning*. Når designeren har fundet en passende matematisk model for konturen af objektet, så kan man fremstille en fysisk model af objektet ved fx at benytte en 3D-printer.
I dette materiale skal vi arbejde med, hvordan man beskriver og undersøger matematiske modeller, hvor der indgår splejsninger.

Eksempel 1

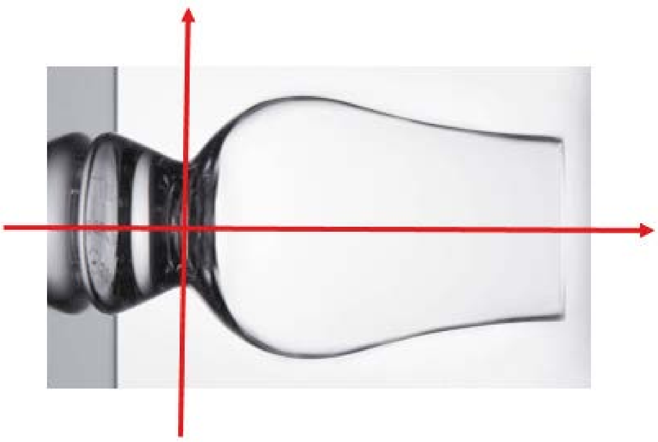
På linket nedenfor kan du se en lille film, der viser, hvordan en funktion med splejset graf benyttes til en 3D-printet model af et glas.
www.kortlink.dk/uhzu

Eksempel 2

Figur 1 viser et whiskyglas af typen *Glencairn*. Glasset er 11,6 cm højt.
Vi ønsker at opstille en matematisk model, der beskriver konturen af glasset. Derfor lægger vi et koordinatsystem ind på fotoet som vist på figur 2. Koordinatsystemet kan lægges ind på fotoet på flere forskellige måder. Det er praktisk at lægge akserne, så førsteaksen er glassets lodrette symmetriakse, og så andenaksen går gennem overgangen til glassets fod.

Vi opstiller nu en forskrift for den funktion f, hvis graf i første og anden kvadrant svarer til glassets kontur.

Figur 1

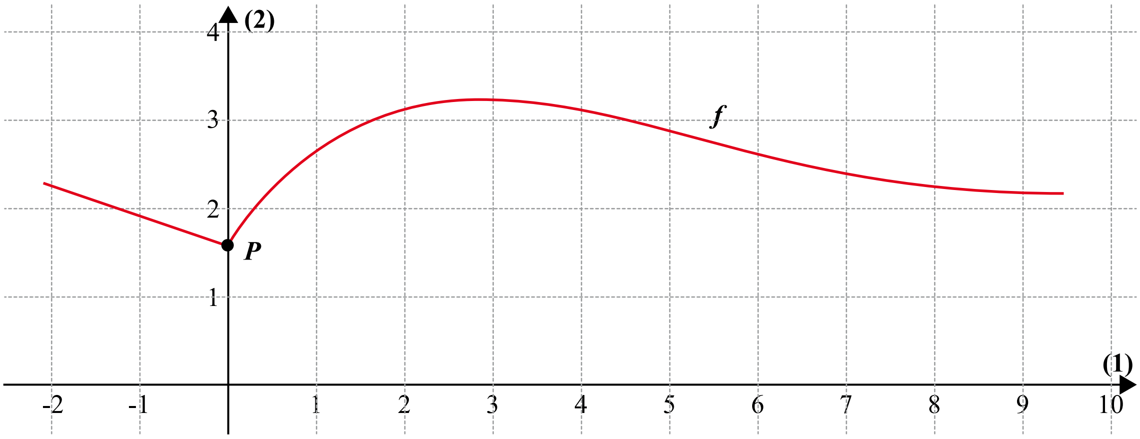


Figur 2

(Eksempel 2 fortsættes på næste side)

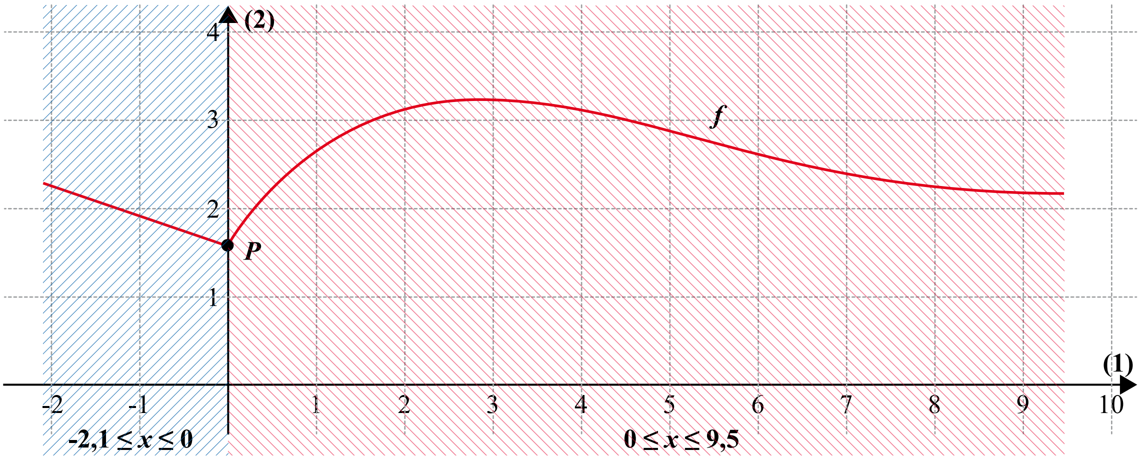
Eksempel 2 (fortsat)

Figur 3 viser grafen for en funktion *f*, der med tilnærmelse passer til glassets kontur i første og anden kvadrant. Enhederne på begge akser er i centimeter. Grafen for *f* er i punktet *P* splejset sammen af to forskellige grafer.



Figur 3

På nedenstående figur er de to lodrette strimler, der indeholder hver af de to dele af grafen for *f*, markeret med hver sin skravering.



Figur 4

For $-2{,}1 \leq x \leq 0$ kan grafen for *f* beskrives ved den lineære funktion f_1 med forskriften

$$f_1(x) = -\frac{1}{3} \cdot x + 1{,}6 \ .$$

For $0 \leq x \leq 9{,}5$ kan grafen for *f* beskrives ved fjerdegradspolynomiet f_2 med forskriften

$$f_2(x) = -0{,}00146 \cdot x^4 + 0{,}0414 \cdot x^3 - 0{,}406 \cdot x^2 + 1{,}434 \cdot x + 1{,}6 \ .$$

(Eksempel 2 fortsættes på næste side)

Eksempel 2 (fortsat)

Da $f_1(0)=1,6$ og $f_2(0)=1,6$, mødes graferne for f_1 og f_2 i punktet $P(0, 1.6)$.
Graferne for f_1 og f_2 kan sættes sammen med en splejsning, dvs. de kan *splejses* i P, og man kan skrive forskriften for den samlede graf ved en såkaldt *gaffelforskrift*:

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}\cdot x+1,6 & ,-2,1\le x\le 0 \\ -0,00146\cdot x^4+0,0414\cdot x^3-0,406\cdot x^2+1,434\cdot x+1,6 & ,\ 0<x\le 9,5\,. \end{cases}$$

Funktionen f er ikke defineret uden for intervallet $-2,1\le x\le 9,5$.
Bemærk, at værdien $x=0$ kun tages med i ét af intervallerne i gaffelforskriften, selvom den faktisk kunne bruges i dem begge. I en gaffelforskrift må man aldrig være i tvivl om, hvilken forskrift der gælder for de forskellige x-værdier.

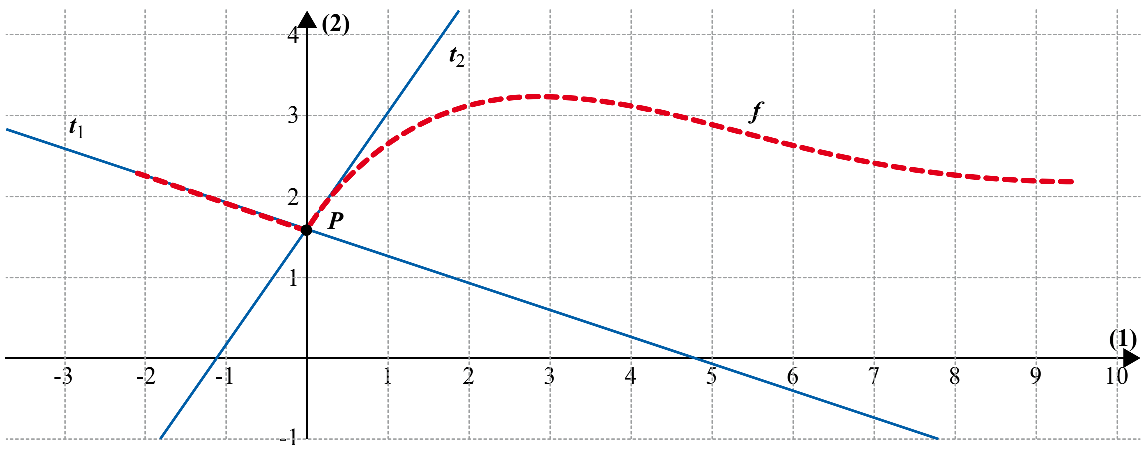
Den *splejsede* graf kan også beskrives ved funktionen

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}\cdot x+1,6 & ,-2,1\le x< 0 \\ -0,00146\cdot x^4+0,0414\cdot x^3-0,406\cdot x^2+1,434\cdot x+1,6 & ,\ 0\le x\le 9,5\quad. \end{cases}$$

Den eneste ændring er i angivelsen af de to intervaller.

Grafen for f har et tydeligt "knæk" i *splejsningspunktet* P. Knækket ses tydeligere, når man har tegnet tangenterne i P til graferne for f_1 og f_2 (se figur 5).
Da f_1 er en lineær funktion, så er dens graf sin egen tangent.

Tangenten i P til grafen for f_1 kaldes t_1, og tangenten i P til grafen for f_2 kaldes t_2.
Hvis tangenterne t_1 og t_2 i punktet P var ens, så ville grafen ikke have et knæk, men være *glat* i P.



Figur 5

Øvelse 1

Tegn ved brug af et CAS-værktøj grafen for f fra eksempel 2:

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}\cdot x+1,6 & ,-2,1\le x\le 0 \\ -0,00146\cdot x^4+0,0414\cdot x^3-0,406\cdot x^2+1,434\cdot x+1,6 & ,\ 0<x\le 9,5\,. \end{cases}$$

2. Stykkevis definerede funktioner

Definition 1

En *stykkevis defineret funktion* er en funktion, hvor funktionens definitionsmængde er opdelt i to eller flere intervaller, og hvor funktionen har forskellige forskrifter i hvert interval.
Almindeligvis angiver man forskriften for en stykkevis defineret funktion ved en *gaffelforskrift*.

Eksempel 3

Funktionen f er en stykkevis defineret funktion med gaffelforskriften

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+5 & , \ -4\leq x<2 \\ x^2-7x+16 & , \ 2\leq x \ . \end{cases}$$

Funktionsudtrykket skal forstås sådan:

Definitionsmængden for f er $[-4;\infty[$, og denne er opdelt i to dele: $-4\leq x<2$ og $2\leq x$.

Når $-4\leq x<2$, er funktionen beskrevet ved forskriften $f(x)=\frac{1}{2}x+5$.

Når $2\leq x$, er funktionen beskrevet ved forskriften $f(x)=x^2-7x+16$.

Øvelse 2

a) Bestem $f(-1)$ og $f(3)$ ved brug af forskriften.

b) Hvad bliver $f(2)$?

Stykkevis definerede funktioner kaldes også for ”Tuborgfunktioner”, da det specielle krøllede parentestegn { eller } ofte kaldes for en Tuborgklamme eller Tuborgparentes.

Det kan ofte være praktisk at navngive de forskellige delforskrifter, der indgår i en stykkevis defineret funktion, så man direkte kan arbejde med hver af dem.

Definition 2

Lad f være en stykkevis defineret funktion defineret ved en gaffelforskrift.
Delforskrifterne, der indgår i gaffelforskriften, navngives $f_1, f_2, f_3, \ldots$.

I eksempel 3 er delforskrifterne $f_1(x)=\frac{1}{2}x+5$ og $f_2(x)=x^2-7x+16$.

Bemærk, at der ikke er angivet definitionsmængder for delforskrifterne f_1 og f_2, da vi i dette materiale ofte har behov for at kunne arbejde med delforskrifterne defineret udover det område, der indgår i gaffelforskriften.
I dette materiale arbejder vi udelukkende med stykkevis definerede funktioner f med to delforskrifter. Metoden kan dog nemt udvides til også at omfatte gaffelforskrifter, der indeholder flere end to delforskrifter.

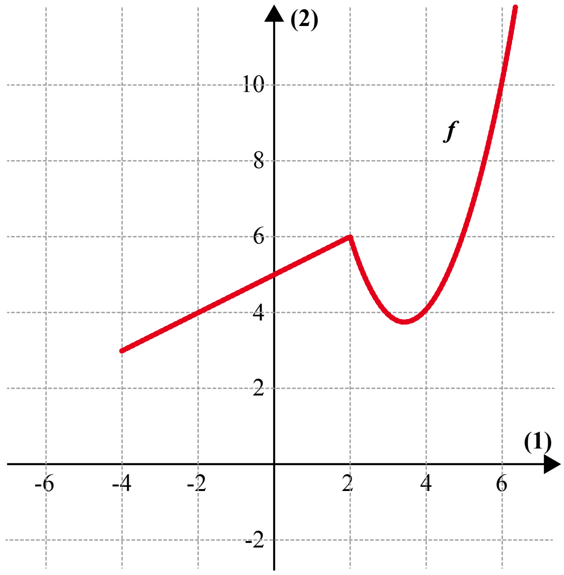
Eksempel 4 (fortsættelse af eksempel 3)

Figur 7 viser grafen for

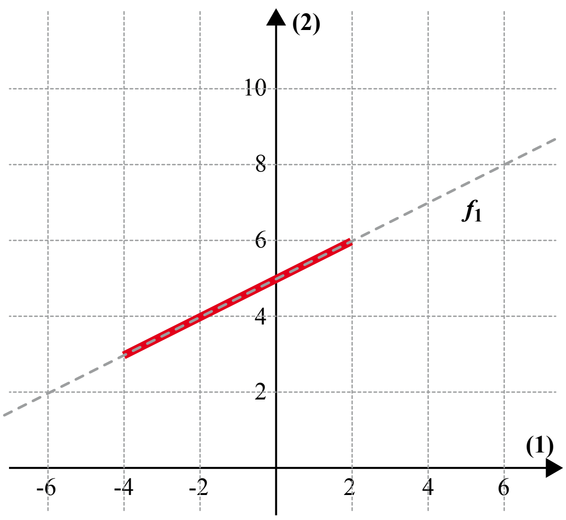
$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+5 & , \ -4\le x<2 \\ x^2-7x+16 & , \ 2\le x \ . \end{cases}$$

Grafen er splejset af et linjestykke og et udsnit af en parabel.

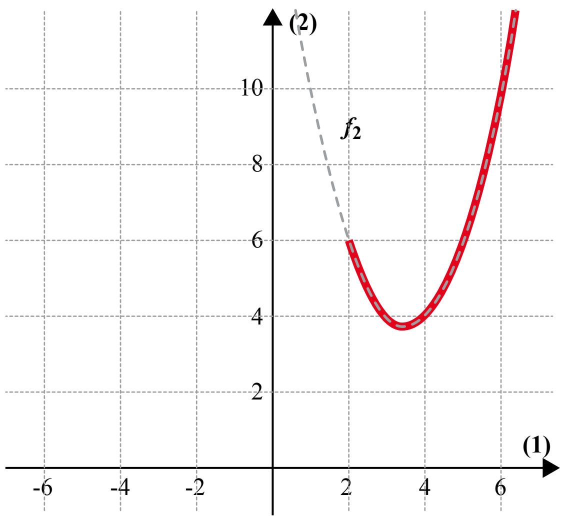
Figur 8 og 9 viser graferne for delfunktionerne f_1 og f_2 sammen med den del af grafen for f, som de hver for sig beskriver. Funktionerne f_1 og f_2 er defineret for alle reelle tal. Det er kun de røde dele af graferne for f_1 og f_2 , der indgår i den splejsede graf for f.



Figur 7



Figur 8



Figur 9

Vi ser på figur 7, at grafen for f er sammenhængende i det punkt, hvor definitionsmængden for f deles i to intervaller. Matematisk siger vi, at funktionen f er *kontinuert* i hele sin definitionsmængde, herunder specielt for $x=2$.
Da f_1 og f_2 hver for sig har en større definitionsmængde, end når de indgår i gaffelforskriften, kan vi også udregne deres funktionsværdi, når $x=2$:

$$f_1(2)=\tfrac{1}{2}\cdot 2+5=6 \qquad \text{og} \qquad f_2(2)=2^2-7\cdot 2+16=6\,.$$

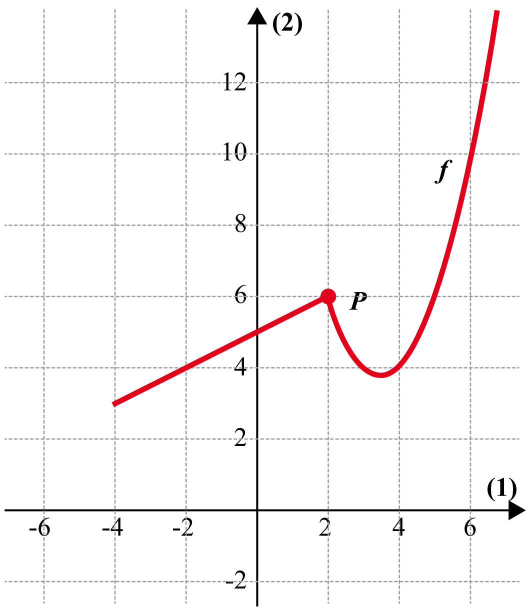
Da disse to funktionsværdier er ens, er grafen for f sammenhængende i punktet $P(2,6)$.

Definition 3

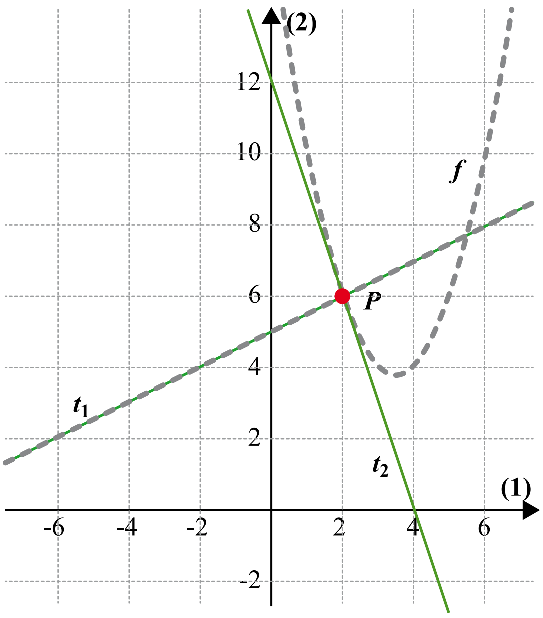
Lad f være en stykkevis defineret funktion med delfunktioner f_1 og f_2 og definitionsmængde delt ved $x = x_0$.
Hvis $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, er funktionen f *kontinuert* i x_0.
Grafen for f kaldes da for en *splejset graf*.
Punktet $P(x_0, f(x_0))$ kaldes et *splejsningspunkt*.

Eksempel 5 (fortsættelse af eksempel 4)

I splejsningspunktet $P(2,6)$ er der et knæk på den splejsede graf (se figur 10).
Figur 11 viser tangenterne i P til hver af graferne for delfunktionerne f_1 og f_2.
Tangenten i P til grafen for f_1 kaldes t_1, og tangenten i P til grafen for f_2 kaldes t_2.
Da f_1 er en lineær funktion, er dens graf sin egen tangent.
Tangenterne t_1 og t_2 kan fx bestemmes med et CAS-værktøj.



Figur 10



Figur 11

Definition 4

Lad f være en stykkevis defineret, kontinuert funktion med delfunktioner f_1 og f_2 og definitionsmængde delt ved $x = x_0$.
Grafen for f er derfor splejset, og splejsningspunktet kaldes P.
Tangenten i P til grafen for f_1 kaldes t_1, og tangenten i P til grafen for f_2 kaldes t_2.
Hvis tangenterne t_1 og t_2 er sammenfaldende, siger vi, at grafen for f er *glat* i P.

Da vi véd, at tangenterne t_1 og t_2 begge går gennem splejsningspunktet P, kan de kun være sammenfaldende, hvis deres hældninger er ens. Der gælder derfor følgende sætning:

Sætning 1

Lad f være en stykkevis defineret, kontinuert funktion med delfunktioner f_1 og f_2 og definitionsmængde delt ved $x = x_0$.
Grafen for f er derfor splejset, og splejsningspunktet kaldes P.
Hvis $f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$, er grafen for f *glat* i P.

Eksempel 6

I eksempel 3, 4 og 5 undersøgte vi en splejset graf med delfunktionerne

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2}x + 5 \quad \text{og} \quad f_2(x) = x^2 - 7x + 16 .$$

Som det ses på figur 11, så er grafen ikke glat i splejsningspunktet $P(2,6)$.

Vi kan bekræfte det ved at udregne tangenthældningerne $f_1'(2)$ og $f_2'(2)$ i splejsningspunktet:

$$f_1'(2) = \tfrac{1}{2} \quad \text{og} \quad f_2'(2) = 2 \cdot 2 - 7 = -3 .$$

Da tangenthældningerne ikke er ens, er grafen ikke glat i splejsningspunktet.

Opgave 1

En stykkevis defineret funktion f har forskriften

$$f(x) = \begin{cases} x^2 , & -2 \le x < 1 \\ x \ , & 1 \le x < 3 . \end{cases}$$

a) Undersøg, om grafen for f er splejset, dvs. undersøg, om $f_1(1) = f_2(1)$.

b) Undersøg, om grafen for f er glat i $x = 1$, dvs. undersøg, om $f_1'(1) = f_2'(1)$.

c) Tegn grafen for f.

Opgave 2

En stykkevis defineret funktion f har forskriften

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 , & -2 \le x < 1 \\ -2x + 5 , & 1 \le x < 3 . \end{cases}$$

a) Undersøg, om grafen for f er splejset i $x = 1$.

b) Undersøg, om grafen for f er glat i $x = 1$.

c) Tegn grafen for f.

Eksempel 7

En stykkevis defineret funktion f har forskriften

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x+1 & , \ -2\le x\le 2 \\ f_2(x) & , \quad 2<x\le 6. \end{cases}$$

Vi ønsker at bestemme forskriften for delfunktionen f_2 af typen

$$f_2(x)=a\cdot x+b\,,$$

så grafen for f er glat i $x=2$.

Grafen for den ønskede delfunktion f_2 må derfor være tangenten til grafen for f_1 i punktet $Q(2,\ f_1(2))$.

Ligningen for tangenten til grafen for f_1 i punktet $Q(2,\ f_1(2))$ kan bestemmes med et CAS-værktøj til $y=7x-3$.

Derved bliver forskriften for den søgte delfunktion bestemt ved

$$f_2(x)=7x-3\ .$$

Funktionen f er så bestemt ved

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x+1 & , \ -2\le x\le 2 \\ 7x-3 & , \quad 2<x\le 6. \end{cases}$$

Øvelse 3 (fortsættelse af eksempel 7)

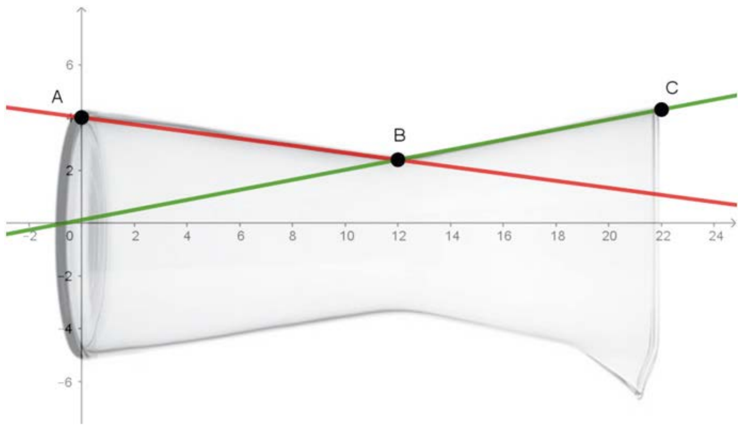
a) Tegn grafen for funktionen f .

3. Former beskrevet ved splejsning af funktionsgrafer

Opgave 3

Figur 12 viser en karaffel af typen *Kartio*. På figur 13 er et koordinatsystem lagt ind på fotoet. Vi ønsker at opstille en matematisk model, der beskriver den del af glassets kontur, der ligger i første kvadrant.

Figur 12



Figur 13

Det oplyses, at punkterne A, B og C har koordinatsættene $A(0, 4)$, $B(12, 2.4)$ og $C(22, 4.3)$. Men god tilnærmelse kan konturen beskrives med to linjestykker AB og BC.
Stykket AB kan beskrives med grafen for den lineære funktion f_1, og stykket BC kan beskrives med grafen for den lineære funktion f_2. Graferne for de to funktioner splejses i punktet B.

a) Bestem forskrifterne for f_1 og f_2.

b) Bestem en gaffelforskrift for den funktion f, der beskriver glassets kontur i første kvadrant.

c) Tegn grafen for f.

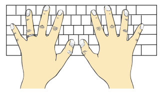
Opgave 4

Konturen af *Glencairn*-glasset i eksempel 2 kan som tidligere nævnt beskrives ved grafen for funktionen

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}\cdot x+1{,}6 & ,\ -2{,}1\le x\le 0\\ -0{,}00146\cdot x^4+0{,}0414\cdot x^3-0{,}406\cdot x^2+1{,}434\cdot x+1{,}6 & ,\ 0<x\le 9{,}5\,.\end{cases}$$

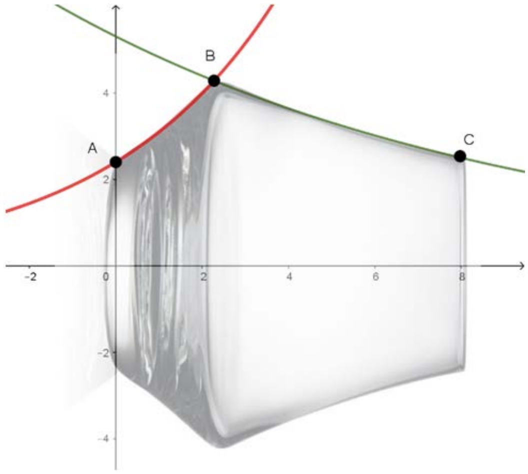
a) Benyt forskriften til at bestemme den største bredde på *Glencairn*-glasset.

Opgave 5



Figur 14 viser et romglas af typen *Juvel*.
På figur 15 er et koordinatsystem lagt ind på fotoet. Vi ønsker at opstille en matematisk model, der beskriver den del af glassets kontur, der ligger i 1. kvadrant.

Figur 14



Figur 15

Det oplyses, at punkterne A, B og C har koordinatsættene $A(0, 2.4)$, $B(2.2, 4.3)$ og $C(8, 2.5)$.
Men god tilnærmelse kan buestykket AB beskrives med grafen for en eksponentielt voksende funktion f_1 , og buestykket BC kan beskrives med grafen for en eksponentielt aftagende funktion f_2 . Graferne for de to funktioner splejses i punktet B.

a) Benyt regression til at bestemme forskrifterne for f_1 og f_2 .

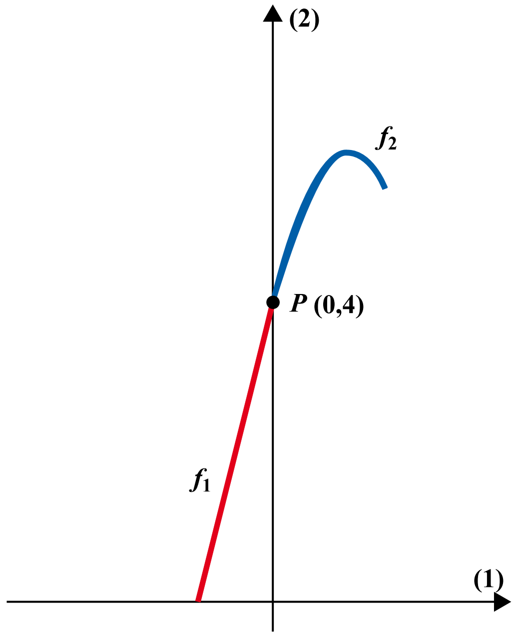
b) Bestem en gaffelforskrift for den funktion f, der beskriver glassets kontur i 1.kvadrant.

c) Tegn grafen for f.

Opgave 6

En grafisk designer vil lave en arbejdstegning for bogstavet ” *f* ”
til et logo (figur 16).
Logo-bogstavet skal udformes som en splejset graf, så det er sammensat af et
linjestykke og en del af en parabel. Der skal være glat overgang i splejsningspunktet *P* (figur 17),
og den lille tværstreg ser vi bort fra.

Figur 16



Figur 17

På figur 17 er linjestykket og parabelbuen lagt ind i et koordinatsystem.
Parabelbuen kan beskrives med funktionen f_2 givet ved

$$f_2(x) = -2x^2 + 4x + 4 \text{, når } 0 \le x \le 1{,}5 .$$

Linjestykket kan beskrives med funktionen f_1.
Der skal være glat overgang i punktet $P(0, 4)$.

a) Bestem forskriften for den lineære funktion f_1.

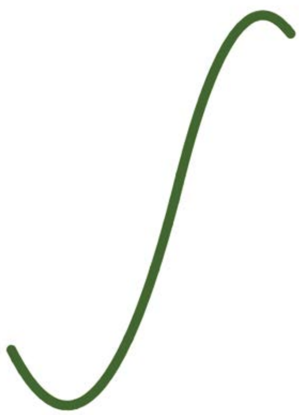
Linjestykket ligger i 2. kvadrant.

b) Bestem en gaffelforskrift for den stykkevis definerede funktion f, der beskriver logo-bogstavet.

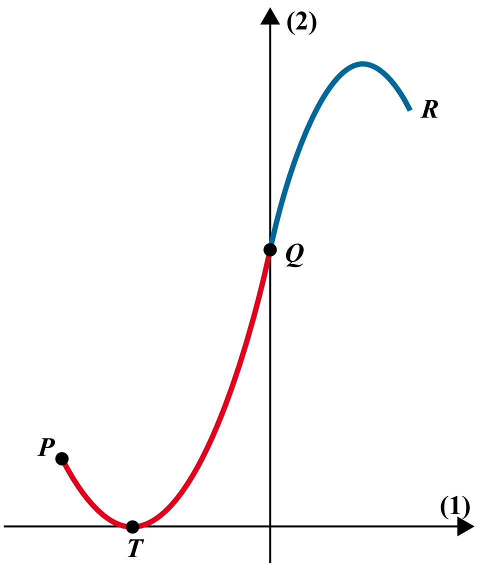
c) Tegn grafen for f.

Eksempel 8

På figur 18 viser den grønne kurve en arbejdstegning til bogstavet "S" til et logo.
Logo-bogstavet skal udformes som graf for en splejset funktion, så det er sammensat af to parabelbuer med en glat overgang i splejsningspunktet Q (se figur 19).



Figur 18



Figur 19

Figur 19 viser de to parabelbuer lagt ind i et koordinatsystem.
Den røde parabel går gennem punkterne $P(-6, 2)$ og $Q(0, 8)$ og har $T(-4, 0)$ som toppunkt.
Den røde parabel kan beskrives med et andengradspolynomium f_1.
Ved brug af kvadratisk regression (andengradsregression) på CAS-værktøjet kan vi bestemme en forskrift for f_1.
Vi får $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8$.

Øvelse 4 (fortsættelse af eksempel 8)

Eftervis med et CAS-værktøj, at parablen gennem punkterne $P(-6, 2)$, $Q(0, 8)$ og $T(-4, 0)$ kan beskrives ved andengradspolynomiet $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8$.

Eksempel 9 (fortsættelse af eksempel 8)

Den blå parabel på figur 19 går gennem punkterne $Q(0, 8)$ og $R(4, 12)$, og der er glat overgang mellem de to parabler i splejsningspunktet Q.
Den blå parabel beskrives med andengradspolynomiet $f_2(x) = ax^2 + bx + c$.
Da parablen skal gå gennem punktet $Q(0, 8)$, må $c = 8$.
Da der skal være en glat overgang mellem de to parabler i punktet Q, skal de to parabler have samme tangenthældning i Q, dvs. $f_1'(0) = f_2'(0)$.
Ved beregning fås, at $f_1'(0) = 4$, og derfor skal også $f_2'(0) = 4$.
Da b netop er hældningskoefficienten for tangenten til grafen for f_2 i punktet Q, så må $b = 4$.
Til sidst indsættes koordinatsættet for punktet R i forskriften $f_2(x) = ax^2 + 4x + 8$, dvs. $f_2(4) = 12$, og konstanten a bestemmes herefter ved ligningsløsning.

Øvelse 5 (fortsættelse af eksempel 9)

a) Gennemfør ligningsløsningen ovenfor, og vis, at $a = -\frac{3}{4}$.

b) Begrund, at den blå del af logo-bogstavet derfor kan beskrives ved

$$f_2(x) = -\tfrac{3}{4}x^2 + 4x + 8 \ , 0 \le x \le 4 .$$

Øvelse 6 (fortsættelse af eksempel 8-9 og øvelse 4-5)

a) Bestem en gaffelforskrift for den stykkevis definerede funktion *f*, der beskriver logo-bogstavet.

b) Tegn grafen for *f*.

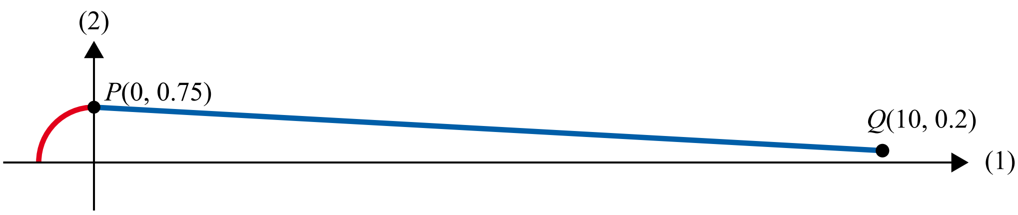
4. Former beskrevet ved splejsning af geometriske figurer og funktionsgrafer

Eksempel 10

En kunstner ønsker at skabe kunstige træer til en skulpturel udsmykning som vist på figur 20.

Figur 20
Billedkilde: stx, matematik A, 23. maj 2017.

Figur 21 viser konturen af modellen, hvor halvdelen af tværsnittet er indlagt i første og anden kvadrant. Koordinatsystemets enheder måles i meter. Det røde stykke af grafen kan beskrives som en del af en cirkel med centrum i (0,0) og radius 0,75 meter. Det blå stykke af grafen er linjestykket *PQ*. De to grafstykker splejses i punktet *P*.



Figur 21

Øvelse 7 (fortsættelse af eksempel 10)

a) Argumentér for, at cirklen, som den røde del af grafen på figur 21 er en del af, kan beskrives ved ligningen $x^2 + y^2 = 0{,}5625$.

b) Isolér y i ligningen $x^2 + y^2 = 0{,}5625$, og argumentér herved for, at den røde del af grafen kan beskrives ved $y = \sqrt{0{,}5625 - x^2} \quad , \quad -0{,}75 \le x \le 0$.

Øvelse 8 (fortsættelse af eksempel 10)

a) Argumentér for, at det blå linjestykke PQ på figur 21 kan beskrives ved ligningen

$$y = -0{,}055 \cdot x + 0{,}75 \quad , \quad 0 \le x \le 10 .$$

Øvelse 9 (fortsættelse af eksempel 10)

a) Bestem en gaffelforskrift for den stykkevis definerede funktion f, der beskriver konturen af det kunstige træ.

b) Tegn grafen for f.

Når man splejser dele af cirkler med grafen for en funktion, er det ofte nemmest at undersøge, om grafen er glat i splejsningspunktet ved direkte at udnytte cirklens tangent i splejsningspunktet.
Vi kan derfor bruge en speciel udgave af sætning 1.

Sætning 2

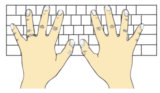
Lad f være en stykkevis defineret, kontinuert funktion, hvis graf er fremkommet ved splejsning af en del af en cirkel og en del af grafen for en funktion f_2 . Splejsningspunktet kaldes P.

Hvis hældningen for cirkeltangenten i punktet P er den samme som hældningen for tangenten til grafen for f_2 i punktet P, så er grafen for f *glat* i P.

Eksempel 11 (fortsættelse af eksempel 10)

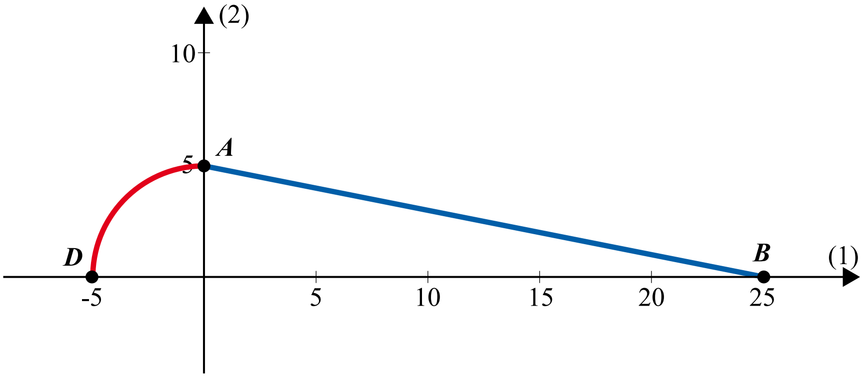
Konturen af det kunstige træ i eksempel 10 er splejset af cirklen med ligningen $x^2 + y^2 = 0{,}5625$ og linjen med ligningen $y = -0{,}055 \cdot x + 0{,}75$. Splejsningspunktet er $P(0,\ 0.75)$.
Da cirklen har vandret tangent i punktet P (dvs. hældningen af cirklens tangent er 0), og da hældningen af linjen er –0,055, så er grafen ikke glat i punktet P.

Opgave 7



En designer skal fremstille nogle kunstige isvafler til en reklame.
Isvaflerne skal udføres i 3D-print.
Konturen af modellen skal være en splejset graf for en stykkevis defineret funktion *f*.

Billedkilde: Colourbox



Figur 22

Figur 22 viser konturen af modellen, hvor halvdelen af tværsnittet er indlagt i første og anden kvadrant.
Konturen sammensættes af en cirkelbue (kvartcirkel) *DA*, der er en del af cirklen med centrum i (0,0) og radius 5, og et linjestykke *AB* (se figur 22). De to grafstykker splejses i punktet *A*.
Koordinatsættene for de tre punkter er $D(-5, 0)$, $A(0, 5)$ og $B(25, 0)$.

a) Bestem en ligning for den cirkel, som buestykket *DA* er en del af.

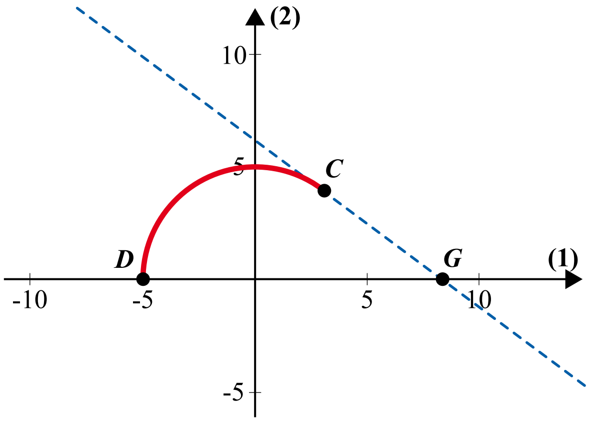
b) Bestem en gaffelforskrift for den stykkevis definerede funktion *f*.

c) Tegn grafen for *f*.

d) Er grafen for *f* glat i *A*?

Eksempel 12 (fortsættelse af opgave 7)

Designeren af isvaflen prøver at ændre modellen. Cirkelbuen *DC* er igen en del af cirklen med centrum i (0,0) og radius 5, men splejsningspunktet skal være *C* (3,4). Cirkelbuen *DC* skal splejses med et linjestykke *CG*, så der er en glat overgang i punktet *C* (se figur 23).



Figur 23

Da der skal være glat overgang i *C*, så skal linjen gennem *C* og *G* være cirkeltangenten i *C*. Punktet *G* er skæringspunktet mellem denne tangent og førsteaksen.

Øvelse 10 (fortsættelse af eksempel 12)

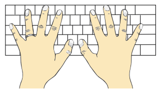
a) Bestem en ligning for cirkeltangenten i punktet *C*.

b) Bestem koordinatsættet til punktet *G*.

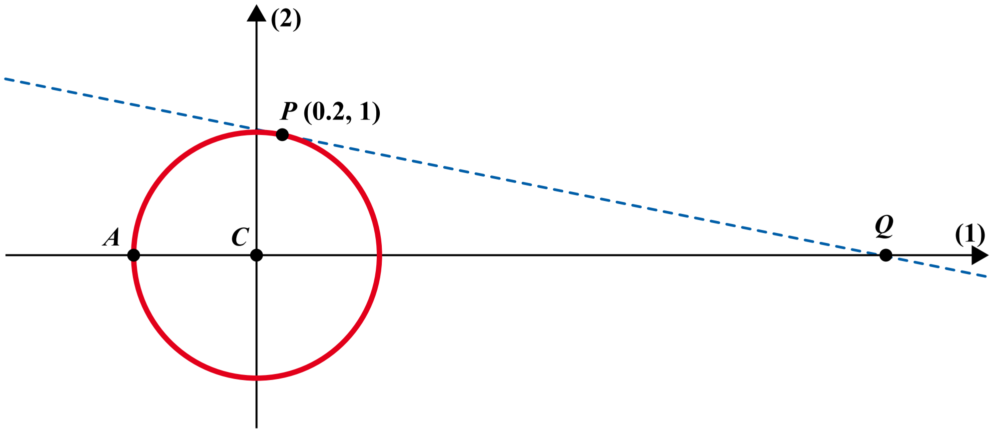
Øvelse 11 (fortsættelse af eksempel 12)

a) Bestem en gaffelforskrift for en stykkevis defineret funktion *g*, der passer med den nye model.

Opgave 8



Designeren ændrer endnu en gang modellen. Nu benytter hun en cirkel, der har centrum i $C(0,0)$, og som går gennem punktet $P(0.2, 1)$.
Cirkeludsnittet AP skal splejses med et linjestykke PQ, så der er glat overgang i P.



Figur 24

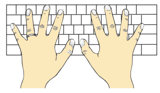
a) Bestem en ligning for cirklen.

b) Bestem en ligning for den linje l, der er tangent til cirklen i punktet P.

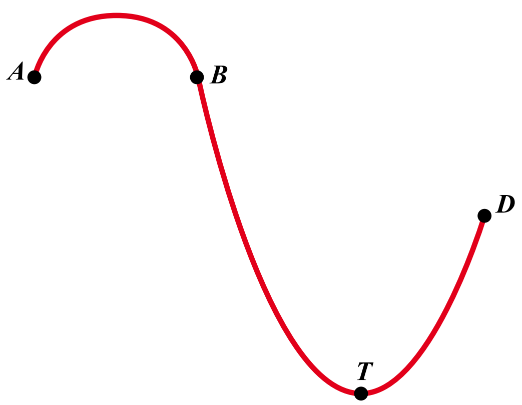
c) Bestem koordinatsættet til hvert af punkterne A og Q.

d) Bestem en gaffelforskrift for den stykkevis definerede funktion h, der passer til modellen.

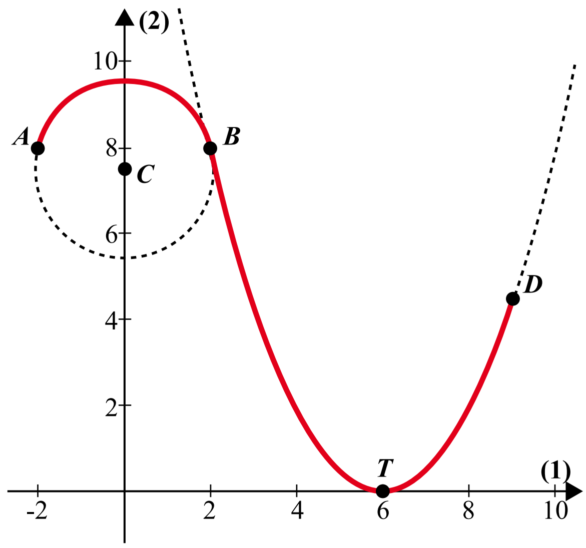
Opgave 9



På figur 25 viser den røde kurve en arbejdstegning til en lyskæde.
Lyskæden skal udformes, så den først følger en cirkelbue fra A til B.
Derefter skal lyskæden følge en parabel fra B til D og have toppunkt i T.



Figur 25



Figur 26

På figur 26 er den røde kurve lagt ind i et koordinatsystem.
Det oplyses, at punkterne A, B, C, T og D har koordinatsættene $A(-2, 8)$, $B(2, 8)$, $C(0, 7.5)$, $T(6, 0)$ og $D(9, 4.5)$.

a) Bestem en ligning for cirklen, der har centrum i C og som går gennem B.

b) Bestem (fx ved andengradsregression) en forskrift for den parabel, der går gennem punkterne B, T og D.

c) Bestem en gaffelforskrift for den stykkevis definerede funktion f, der beskriver lyskæden.

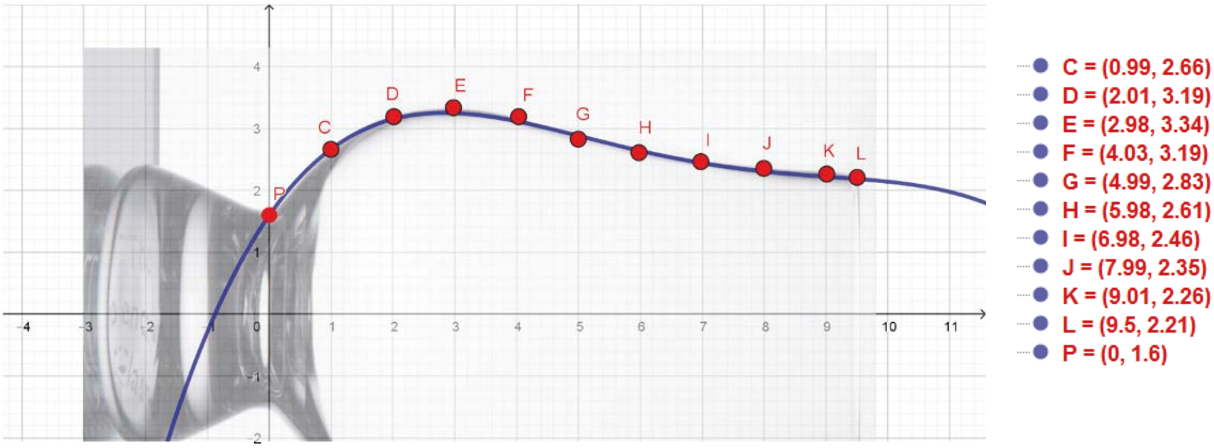
d) Tegn grafen for f.

e) Undersøg, om lyskæden har glat overgang i punktet B.

Appendiks: Modellering af former med splejsede grafer

I eksempel 2 blev et foto af et Glencairn-glas lagt ind i et koordinatsystem, så vi kunne give en matematisk beskrivelse af glassets kontur. Vi vil i dette afsnit se, hvordan man i praksis kan analysere et foto og finde den matematiske model for konturen.
I bilag 1 og 2 kan du se, hvordan du henter et foto ind i CAS-programmerne GeoGebra og Nspire.

Figur 27 viser et foto af Glencairn-glasset fra eksempel 2, hvor en række punkter er markeret. Punkterne er valgt, så de alle ligger på konturen af glasset. Koordinatsættene fremgår af tabellen nedenfor. Der udføres fjerdegradsregression på disse data. Den blå kurve på figur 27 viser den tilhørende regressionsgraf.



Figur 27

Øvelse A1

a) Udfør fjerdegradsregression på punkterne fra figur 27.

b) Sammenlign med forskriften for f_2 i eksempel 2.

Øvelse A1 viser, at man ikke altid får præcist det samme resultat, når man modellerer en figur. Afvigelsen skyldes, at punkterne på fotografiet kan være valgt lidt forskelligt.

Øvelse A2 (fortsættelse af opgave 3)

Vi vil prøve at bestemme forskrifterne for hver af de to funktioner, som beskriver glassets kontur. En digital kopi af billedet findes i filen **Kartio_skala.png**.
Filen er vedhæftet dette forberedelsesmateriale.

a) Hent billedet ind i dit CAS-værktøj, og tilpas billedet og/eller koordinatsystemets skala, så karaflen ligger som vist på figur 13 i opgave 3.

Konturen af karaflen i første kvadrant ønskes beskrevet med en splejset graf for en stykkevis lineær funktion f.

b) Bestem koordinatsæt til tre punkter på konturen, og bestem forskrifterne for hver af de to delfunktioner f_1 og f_2 .

c) Sammenlign med dine resultater fra opgave 3.

Billedet viser Kartio-karaflen fra opgave 3.

Øvelse A3 (fortsættelse af opgave 5)

Vi vil prøve at bestemme forskrifterne for hver af de to funktioner, som beskriver glassets kontur. En digital kopi af billedet findes i filen **Juvel_skala.png**.
Filen er vedhæftet dette forberedelsesmateriale.

a) Hent billedet ind i dit CAS-værktøj, og tilpas billedet og/eller koordinatsystemets skala, så glasset ligger som vist på figur 15 i opgave 5.

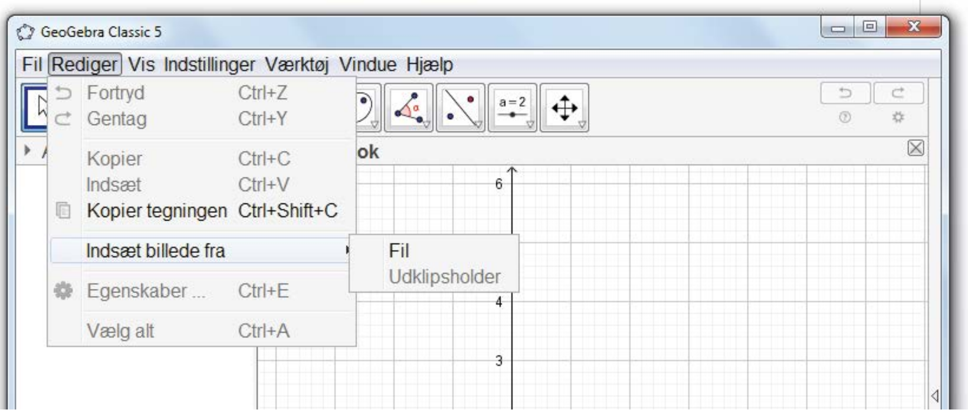
b) Bestem koordinatsættet til punktet P og yderligere to punkter på konturen, så du kan bestemme forskrifterne for hver af de to funktioner f_1 og f_2, der beskriver glassets kontur.

c) Sammenlign med dine resultater fra opgave 5.

Billedet viser Juvel-glasset fra opgave 5.

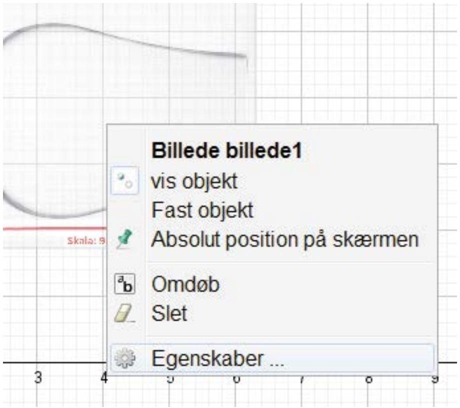
Bilag 1. Sådan kan du hente og tilpasse et foto i GeoGebra

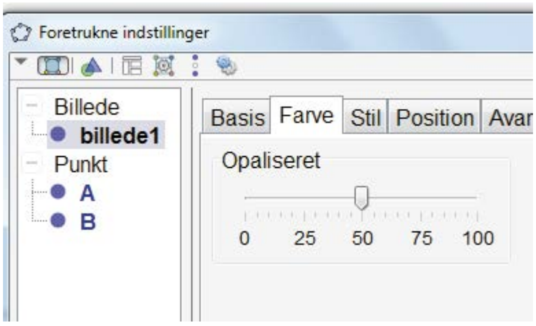
Hvis du vil hente et foto af fx et glas ind på Tegneblokken i GeoGebra, så er det nemmest direkte at trække billedet ind på Tegneblokken fra fx skrivebordet på din computer.
Ellers kan du vælge ”Rediger” på navigationslinjen øverst i GeoGebra, og dernæst vælge ”Indsæt billede fra”. På dén måde kan du hente et billede direkte fra en mappe eller fra udklipsholderen.



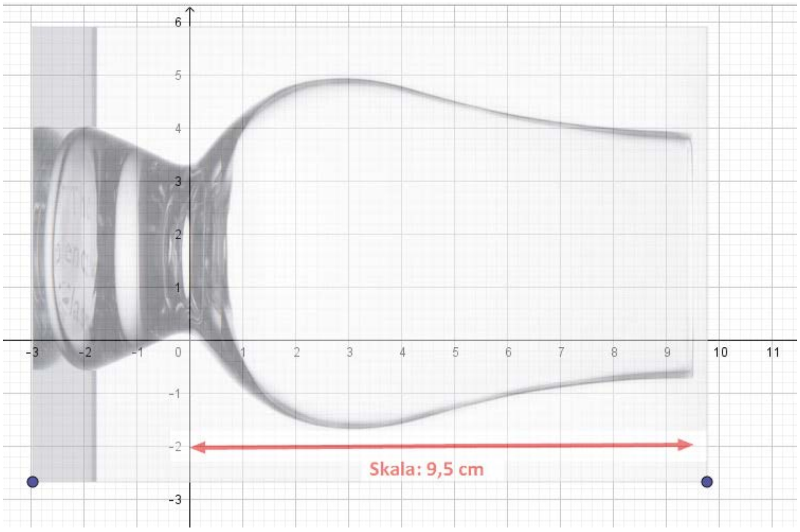
Når billedet er hentet ind på Tegneblokken, skal billedet tilpasses, skaleres og anbringes.

1) Start med at højreklikke på billedet, og vælg så ”Egenskaber”. Her vælges nu fanebladet ”Farve”. For at få billedet gjort gennemsigtigt indstilles ”Opaliseret” på fx 50 % eller 60 %.

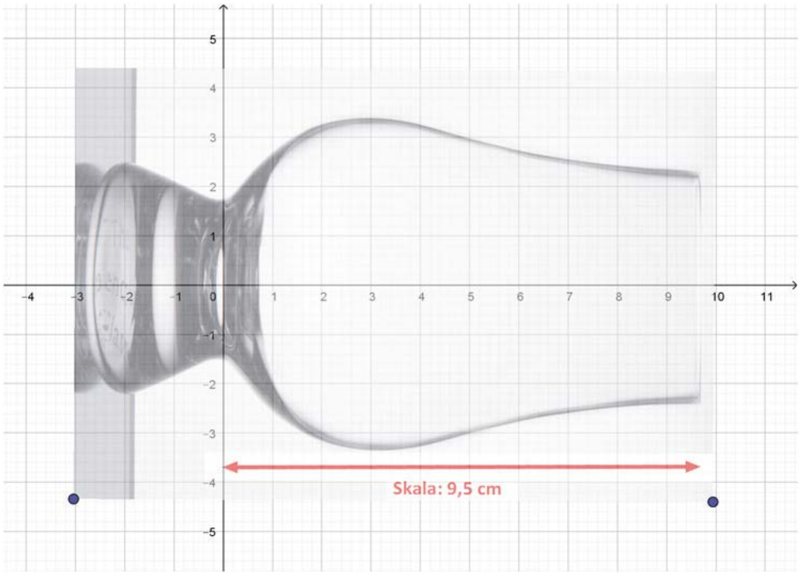




2) Nu skal billedet skaleres. Træk ud i et af de blå punkter nederst i billedet, til skalaen på billedet passer med skalaen på koordinatsystemets førsteakse. Man kan også flytte hele billedet i koordinatsystemet med musestyringen (venstreklik midt på billedet), så det er nemmere at se, at skalaen passer. På figuren nedenfor er billedet anbragt, så skalaen på 9,5 cm går ud fra andenaksen.



3) Til sidst flyttes billedet nu endeligt på plads med musestyringen (venstreklik midt på billedet), så glassets symmetriakse ligger på førsteaksen, og så splejsningspunktet placeres på andenaksen. Husk ikke at ændre på skalaen under flytningen.

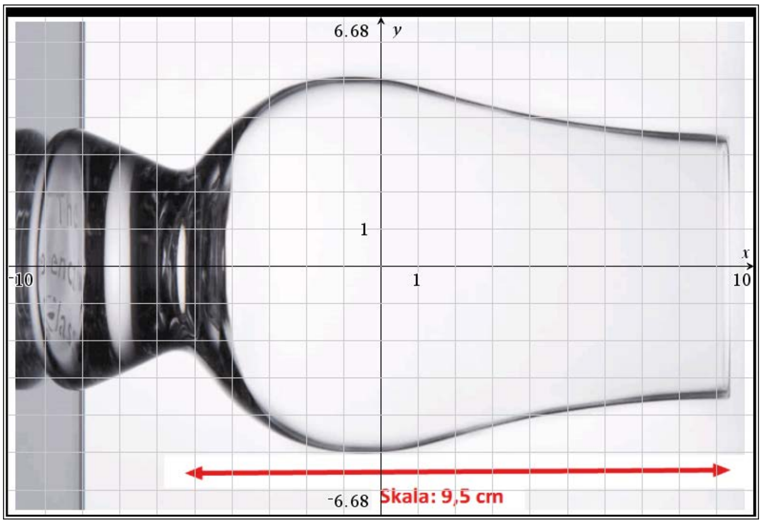


4) Til allersidst låses billedet til koordinatsystemet ved at højreklikke på billedet og vælge ”Fast objekt”. Så ændres billedets placering ikke.

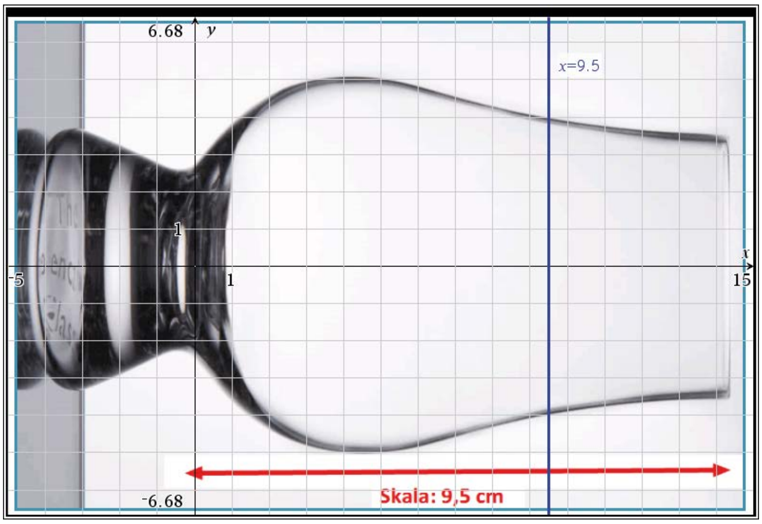
Se hele forklaringen demonstreret på video: www.kortlink.dk/uhzu

Bilag 2. Sådan kan du hente og tilpasse et foto i Nspire

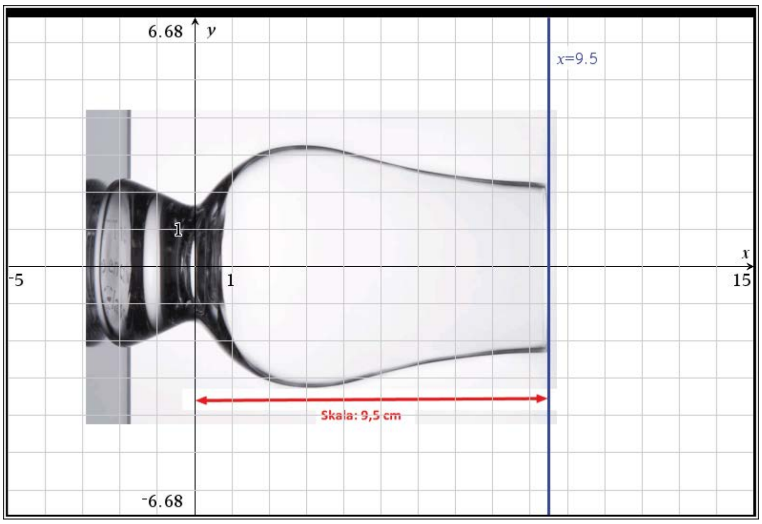
Først åbnes en grafside i Nspire, hvor man vælger at få vist Linjegitter.
Man kan nu hente et foto af fx et glas ind i koordinatsystemet i Nspire ved at klikke på Indsæt og derefter vælge Billede. Herefter vælger man billedfilen, og billedet lægger sig midt ind i koordinatsystemet som vist til højre.



Nu skal billedet flyttes og skaleres. Billedet kan i dette tilfælde godt være i det viste standardvindue, men så ville det ende med at ligge ret langt ude til højre. Derfor rettes *x*-vinduet til at gå fra –5 til 15. Desuden indtegnes den lodrette linje $x = 9.5$ for at gøre det lettere at styre billedet på plads.
Herefter højreklikkes på billedet, og der vælges Markér ▸ Billede.
Derved fremtræder billedet i en blå ramme.
Billedet kan nu flyttes og skaleres.



Billedet *skaleres* ved at gribe fat i et hjørne af den blå billedramme og trække med musen ind mod midten.
Billedet *flyttes* ved at holde musen nede inde i billedet og trække (eller holde musen nede og bruge en piletast). Ved gentagne skaleringer og flytninger opnås til sidst, at billedet ligger symmetrisk om førsteaksen, og at den røde pil ligger fra 0 til 9.5 på førsteaksen.
Hvis man er kommet til at ændre størrelsesforholdet mellem inddelingerne på akserne, kan man højreklikke på grafen og vælge Vindue/Zoom og derefter Zoom-Kvadrat.

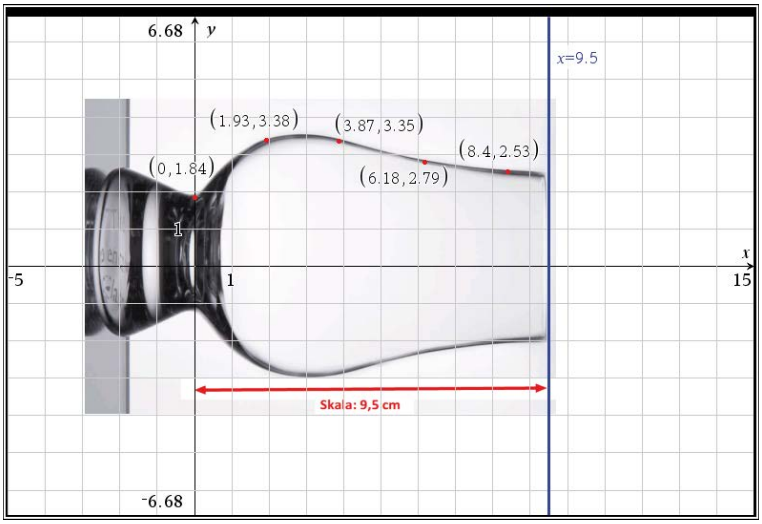


Vi er nu klar til at afmærke nogle punkter på glassets kontur.
Det gøres i grafvinduet ved at åbne værktøjskassen og vælge:

Geometri ▸ Punkter og linjer ▸ Punkt

Afmærk det ønskede antal punkter på grafen.
Aflæs derefter deres koordinatsæt ved at højreklikke på hvert punkt og vælge Koordinater og ligninger.

Koordinaterne til de afmærkede punkter vil vi gerne have ind i et regneark.



Det allernemmeste er at skrive dem af fra grafen. I dette materiale er der nemlig kun brug for at afmærke ganske få punkter.
I stedet kan følgende lidt mindre primitive metode benyttes:
Dobbeltklik på x-værdien i det første koordinatsæt, kopier værdien og indsæt den i x-kolonnen i regnearket. Fortsæt med y-værdien, osv. med de næste punkter.
Derefter foretages den relevante regression i regnearket.
Denne forklaring findes også på video: www.kortlink.dk/uhzu

En mere avanceret måde at indsamle koordinaterne er praktisk, hvis der ønskes et større antal punkter. Det begynder på samme måde som ovenfor.

1. I værktøjskassen vælges Geometri ▸ Punkter og linjer ▸ Punkt, og man sætter et punkt passende sted, fx ude til venstre på kurven på fotoet.
2. Højreklik på punktet, og vælg Koordinater og ligninger.
3. Højreklik på førstekoordinaten, og vælg Lagre. Giv et passende navn, fx *x_* (aldrig bare *x*).
4. Samme procedure med andenkoordinaten. Som tegn på, at koordinaterne er lagret, bliver de skrevet med fede typer. Flyt gerne koordinatsættet hen et passende øde sted på figuren.
5. Indsæt en ny side med Lister og regneark.
6. Giv de to første kolonner et passende navn, fx xkoor og ykoor (brug aldrig *x*, *y* eller andre navne med ét bogstav til disse lister).
7. Gå ind i celle a1, åbn værktøjskassen og vælg Data ▸ Datafangst ▸ Manuelt
8. Ovenover fremkommer nu teksten xkoor:=capture(var,0), hvor man skal skrive x_ (eller det navn, man nu valgte) i stedet for var.
9. Tilsvarende gøres med *y* ved gå ind i celle b1 osv.
10. Der sker tilsyneladende ingenting. Der kræves nemlig en speciel ordre for at gemme det datapunkt, vi har fanget. Tast CTRL + . (altså Control + punktum). På Mac tastes Command i stedet for Control.
11. Gå tilbage til figuren. Træk punktet til en ny placering på kurven på fotoet.
12. Tast CTRL + . osv., indtil der er punkter nok.
13. Gå frem til næste side med regnearket, hvor data nu er fanget og står i de første to lister (kolonner).

Bilag 3. Formelark

Definition 1
En *stykkevis defineret funktion* er en funktion, hvor funktionens definitionsmængde er opdelt i to eller flere intervaller, og hvor funktionen har forskellige forskrifter i hvert interval.
Almindeligvis angiver man forskriften for en stykkevis defineret funktion ved en *gaffelforskrift*.

Definition 2
Lad f være en stykkevis defineret funktion defineret ved en gaffelforskrift.
Delforskrifterne, der indgår i gaffelforskriften, navngives $f_1, f_2, f_3, \ldots$.

Definition 3
Lad f være en stykkevis defineret funktion med delfunktioner f_1 og f_2 og definitionsmængde delt ved $x = x_0$.
Hvis $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, er funktionen f *kontinuert* i x_0 .
Grafen for f kaldes da for en *splejset graf*.
Punktet $P(x_0, f(x_0))$ kaldes et *splejsningspunkt*.

Definition 4
Lad f være en stykkevis defineret, kontinuert funktion med delfunktioner f_1 og f_2 og definitionsmængde delt ved $x = x_0$.
Grafen for f er derfor splejset, og splejsningspunktet kaldes P.
Tangenten i P til grafen for f_1 kaldes t_1 , og tangenten i P til grafen for f_2 kaldes t_2 .
Hvis tangenterne t_1 og t_2 er identiske, kaldes grafen for f *glat i P*.

Sætning 1
Lad f være en stykkevis defineret, kontinuert funktion med delfunktioner f_1 og f_2 og definitionsmængde delt ved $x = x_0$.
Grafen for f er derfor splejset, og splejsningspunktet kaldes P.
Hvis $f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$, kaldes grafen for f *glat* i P.

Sætning 2
Lad f være en stykkevis defineret, kontinuert funktion, hvor den splejsede graf er fremkommet ved splejsning af en del af en cirkel og en del af grafen for en funktion f_2 . Splejsningspunktet kaldes P.
Hvis hældningen for cirkeltangenten i punktet P er den samme som hældningen for tangenten til grafen for f_2 i punktet P, så er den splejsede graf *glat* i P.